Révisions et compléments sur les fonctions réelles et les intégrales sur un segment

— Fonctions usuelles, développements limités, primitives usuelles.

— Fonctions continues par morceaux sur un segment, intégration sur un segment, propriétés de l'intégrale des fonctions cpm sur un segment : linéarité, positivité, inégalités triangulaire et de Cauchy-Schwarz. Stricte positivité de l'intégrale d'une fonction **continue**, positive et non identiquement nulle.

— **Théorème fondamental de l'Analyse**.

— Formule de Taylor avec reste intégral.

Intégrales généralisées :

- Fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque, définition de la convergence (ou divergence) d'une intégrale sur un intervalle I quelconque.
  Cas où f est positive : $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ (si $a \in \mathbb{R}$) est croissante, $x \mapsto \int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ (si $b \in \mathbb{R}$) est décroissante (donc les intégrales généralisées convergent si et seulement si ces fonctions sont majorées).

- *Propriétés et méthodes de calcul* :
  Linéarité de l'intégrale, positivité. **Stricte positivité pour les fonctions continues**. Intégration par parties. Changement de variable. Application au cas des fonctions paires ou impaires (dont l'intégrale converge !) sur $]-a, a[$.

- *Intégrale absolument convergente, fonctions intégrables sur un intervalle qcq.*
  La convergence absolue entraîne la convergence, la réciproque est fausse. L'étude des intégrales semi-convergentes est hors programme. Une fonction f continue par morceaux sur I est dite **intégrable** sur I lorsque l'intégrale de f sur I est absolument convergente.

- *Fonctions intégrables de référence, intégrales de référence* :
  (a) $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ intégrable sur $[0, +\infty[$ ssi $\alpha > 1$, intégrable sur $]0, 1]$ ssi $\alpha < 1$;
  $t \mapsto \dfrac{1}{(t-a)^\alpha}$ sur $]a, b]$ ou $t \mapsto \dfrac{1}{(b-t)^\alpha}$ sur $[a, b[$ ssi $\alpha < 1$ (a ou b sont des bornes finies) ;
  $x \mapsto e^{-\lambda x}$ sur $[0, +\infty[$ ssi $\lambda > 0$; $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0, 1]$; $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.
  (b) Une fonction continue sur $]a, b]$ (a borne finie) et prolongeable par continuité en a est intégrable sur $]a, b]$. Analogue pour $[a, b[$.
  (c) $t \mapsto e^{-t^2/2}$ et $t \mapsto e^{-t^2}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$. Les valeurs des intégrales (sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}^+$) sont à connaître. On peut en connaître une et retrouver les autres par changement de variable ou par parité.

- *Théorème de comparaison pour étudier l'intégrabilité* :
  (i) Si f et g sont continues par morceaux sur I, avec $|f| \leqslant |g|$ sur I, alors :
  (g intégrable sur I) $\Rightarrow$ (f intégrable sur I) (donc f non intégrable $\Rightarrow$ g non intégrable).
  (ii) Si f et g sont continues par morceaux sur $I = [a, b[$ et si $f = \mathcal{O}(g)$ ou $f = o(g)$ en b, alors
  (g intégrable sur I) $\Rightarrow$ (f intégrable sur I) (donc f non intégrable $\Rightarrow$ g non intégrable).
  (Analogue pour $I =]a, b]$).
  (iii) Si f et g sont cpm sur $I = [a, b[$ et si $f \sim g$ en b, alors f intégrable $\Leftrightarrow$ g intégrable.
  (Analogue pour $I =]a, b]$).

- Espace vectoriel $L^1(I, \mathbb{K})$ des fonctions intégrables sur I. Comparaison série-intégrale (révision).