Résumé parce que le programme est long et détaillé :

- Révisions d'algèbre générale, d'algèbre linéaire.
- Compléments d'algèbre linéaire : sev stable par un endomorphisme ; produit cartésien, somme d'un nombre fini de sev d'un espace E, somme directe. Bases adaptées.
- Matrices : trace, matrices par blocs.
- Utilisation des polynômes en algèbre linéaire : polynômes d'endomorphismes ou de matrices, polynômes annulateurs, polynômes de Lagrange.
- Déterminant de Vandermonde.
- Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice carrée (définitions seulement).

Des détails ci-dessous

Révisions du programme de PCSI en Algèbre générale :

- **Nombres complexes** : module et argument, écriture algébrique et exponentielle, racines n-èmes de l'unité, racines n-èmes d'un complexe quelconque.
- **Polynômes** : degré et opérations, division euclidienne, divisibilité, racines, ordre de multiplicité (définition ou à l'aide des dérivées successives).

Algèbre linéaire : révisions

- **Espaces vectoriels**, sous-espaces vectoriels. **Familles** finies libres, génératrices, bases ; **dimension** finie ; théorème de la base incomplète.
- **Applications linéaires**, noyau, image, lien avec l'injectivité, la surjectivité ; composition d'applications linéaire. Applications linéaires de rang fini, théorème du rang.
- **Opérations sur les matrices**, notamment la transposition et le calcul d'inverse éventuel. Déterminant d'une matrice carrée (développement par rapport à une ligne ou colonne, pivot), opérations sur le déterminant, caractérisation des bases ou des matrices inversibles par le déterminant.
- **Matrices semblables** : définition, caractérisation (deux matrices sont semblables ssi elles représentent un même endomorphisme dans des bases différentes). Lien avec la transposition, l'inversibilité, le déterminant, le rang ; la seule matrice semblable à αI_n est αI_n elle-même.

- **Matrice associée à une application linéaire** dans des bases données. Application linéaire canoniquement associée à une matrice donnée. **Recherche du rang** dans des cas simples, **à partir de relations évidentes sur les colonnes de la matrice** (pivot inutile) ; base de l'image ; **recherche d'une base du noyau grâce au TDR et aux relations sur les colonnes**.
  Rq : Le TDR s'énonce pour une matrice : $\dim(\ker A) + \operatorname{rg}(A) = p =$ nb de colonnes de A.

- **Projecteurs** sur F, parallèlement à G lorsque F et G sont supplémentaires dans E. Caractérisation $p \circ p = p$, dans ce cas p est le projecteur sur $\mathrm{Im}(p)$, de direction est $\ker(p)$.
  $x \in \mathrm{Im}(p) \Leftrightarrow p(x) = x$: pour un projecteur, $\mathrm{Im}(p) = \ker(p - \mathrm{Id}_E)$ est l'espace des invariants.
  Cas des **symétries**.

Algèbre linéaire : compléments

- Produit cartésien de deux espaces vectoriels, de p espaces vectoriels, dimension (si les p ev sont de dim finie).

- **Sev stable par un endomorphisme** : si $u \in L(E)$, F sev de E est stable par u lorsque $u(F) \subset F$. Dans ce cas, u induit un endomorphisme sur F (restriction de u à F au départ et à l'arrivée).
  Si u et v commutent, $\ker(u)$ est stable par v, et vice-versa.

- **Base de E adaptée à un sev F** : en dim finie, avec F sev de E, il existe des bases $(e_1, ..., e_p, e_{p+1}, ..., e_n)$ de E telles que $(e_1, ..., e_p)$ soit une base de F. Une telle base est construite grâce au Thm de la base incomplète.

- **Sommes et sommes directes de p sev** :
  Définitions : pour la somme directe, la définition est l'unicité de la décomposition de 0_E ;
  Propriétés : $F_1 + ... + F_p$ est le plus petit sev de E contenant $\bigcup_{i=1}^{p} F_i$,
  la somme $S = \sum_{i=1}^{p} F_i$ est directe ssi tout vecteur de S se décompose de manière unique.
  Cas de la dimension finie. Décomposition de E en somme directe obtenue par fractionnement d'une base de E. Base de E adaptée à une décomposition.

— **Trace d'une matrice carrée** : Linéarité, relation $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$ (valable pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$). Deux matrices semblables ont même trace, réciproque fausse. La trace d'un endomorphisme est la trace de n'importe quelle matrice associée. La trace d'un projecteur est égale à son rang.

— Écriture d'une matrice par **blocs**, exemples, transposition. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs. Combinaison linéaire, produit par blocs.
Un sev F est stable par u ssi la matrice associée à u dans une base de E adaptée à F est triangulaire par blocs : $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, où A est la matrice associée à l'endomorphisme de F induit par u.
Des sev F_1, ..., F_p tels que $F_1 \oplus ... \oplus F_p = E$ sont stables par u ssi la matrice de u dans une base adaptée à la décomposition est diagonale par blocs : $\begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p \end{pmatrix}$, où A_i est la matrice de l'endomorphisme de F_i induit par u.

À connaître : Dans une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$ avec $\dim(F) = r$, matrice "réduite" du projecteur sur F parallèlement à G : $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$, matrice réduite de la symétrie : $\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & -I_{n-r} \end{array}\right)$.

— **Polynômes d'endomorphismes ou matrices, polynômes annulateurs** : définition de $P(u) \in L(E)$ ou $P(A) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour $P \in \mathbb{K}$, $u \in L(E)$, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Propriétés, notamment : $P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u) = (PQ)(u) = (QP)(u)$ (les endomorphismes $P(u)$ et $Q(u)$ commutent).
Lien entre l'existence d'un polynôme annulateur ($P(u) = 0$) de coefficient constant non nul, et l'inversibilité de u et l'expression de u^{-1} comme polynôme en u. Utilisation d'un polynôme annulateur pour obtenir les puissances de u.

— Famille des **polynômes interpolateurs de Lagrange** associés à $n+1$ scalaires a_0, ..., a_{n+1} distincts : définition (expression générale), ils sont tous de degré n, $L_k(a_j) = \delta_{k,j}$ (symbole de Krönecker), ils forment une base de $\mathbb{K}_n[X]$.
Les coordonnées de $Q \in \mathbb{K}_n[X]$ dans la base $(L_0, ..., L_n)$ sont les $(Q(a_k))_{0 \leqslant k \leqslant n}$. En particulier : $1 = \sum_{k=0}^{n} L_k$, et $X^p = \sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k$ (pour tout $p \in \mathbb{N}$).

— **Matrice et déterminant de Vandermonde** associés à n scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Connaître l'expression du déterminant (produit double, le produit contient $\frac{n(n-1)}{2}$ termes... pourquoi ?) et savoir la redémontrer par opérations élémentaires.
Lorsque les λ_j sont distincts, la matrice de Vandermonde est la matrice donnant la base canonique de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ en fonction de la base des polynômes de Lagrange associés à $(\lambda_1, ..., \lambda_n)$.

— **Éléments propres** (pour un endomorphisme en dim finie ou infinie, pour une matrice carrée) : valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre, spectre.
Exemples à connaître : homothéties, projecteurs, symétries (spectre et sev propres) ; matrices diagonales ou triangulaires (les valeurs propres sont les coefficients diagonaux).