Révisions du programme de PCSI en Algèbre générale et linéaire :
Voir le programme de la semaine 6.

- Nombres complexes, polynômes
- Espaces vectoriels, sous-espaces vectoriels. Applications linéaires ; familles de vecteurs, bases ; dimension finie. Matrices, déterminants, matrices semblables.
- Matrice associée à une application linéaire dans des bases données. Recherche du rang à partir de relations évidentes sur les colonnes de la matrice ; base de l'image ; recherche d'une base du noyau grâce au TDR et aux relations sur les colonnes.
- Projecteurs, symétries.

Algèbre linéaire : compléments *Voir le programme de la semaine 6.*

- Produit cartésien d'ev.
- Sev stable par un endomorphisme ; si u et v commutent, $\ker(u)$ est stable par v, et vice-versa. Base de E adaptée à un sev F.
- Sommes et sommes directes de p sev ; base de E adaptée à une décomposition en $\oplus$.
- Trace d'une matrice carrée.
- Écriture d'une matrice par blocs, transposition ; déterminant d'une matrice triangulaire par blocs ; produit par blocs ; lien avec les sev stables par un endomorphismes (matrice triangulaire par blocs, diagonale par blocs dans le cas d'une somme directe de sev stables).
- Polynômes d'endomorphismes ou matrices, polynômes annulateurs ; lien entre l'existence d'un polynôme annulateur ($P(u) = 0$) et l'inversibilité de u et l'expression de u^{-1} comme polynôme en u. Utilisation d'un polynôme annulateur pour obtenir les puissances de u.
- Polynômes interpolateurs de Lagrange associés à $n+1$ scalaires a_0, ..., a_{n+1} distincts.
- Matrice et déterminant de Vandermonde associés à n scalaires $\lambda_1, ..., \lambda_n$.

Réduction des endomorphismes et matrices carrées.

Seulement la moitié du chapitre au programme cette semaine (pas encore le lien entre la réduction et les polynômes annulateurs (et donc le théorème de Cayley-Hamilton est aussi laissé de côté pour l'instant), ni la trigonalisation.

1. Éléments propres (pour un endomorphisme en dim finie ou infinie, pour une matrice carrée) : valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre, spectre.
Exemples à connaître : homothéties, projecteurs, symétries (spectre et sev propres) ; matrices diagonales ou triangulaires (les valeurs propres sont les coefficients diagonaux).

2. Propriétés

- 0 est valeur propre de f si et seulement si f est non injectif (non bijectif en dim finie)
- Lien entre valeurs propres de f et de f^{-1} (si f bijectif), ou de $af + bId_E$ (avec $a \neq 0$), ou de f^k ($k \in \mathbb{N}$), ou de $P(f)$ ($P \in \mathbb{K}[X]$). Comparaison des sous-espaces propres dans ces deux cas.
- Si P est un polynôme annulateur de f, alors toute valeur propre de f est racine de P : $\boxed{\mathrm{Sp}(f) \subset \mathrm{Rac}(P)}$.
- $x \neq 0$ est un vecteur propre de f ssi $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par f.
- Si $g \circ f = f \circ g$, tout sous-espace propre de l'un est stable par l'autre. En particulier tout sev propre de f est stable par f, l'endomorphisme de $E_\lambda(f)$ induit par f est $\lambda\ \mathrm{Id}_{E_\lambda}$.
- p vecteurs propres associés à p valeurs propres distinctes forment une famille libre.
  p sous-espaces propres associés à p valeurs propres distinctes sont en somme directe.
  En dimension n, un endomorphisme admet au plus n valeurs propres distinctes.

3. Polynôme caractéristique
En dimension n : $\chi_f(x) = \det(x\mathrm{Id}_E - f)$ est de degré n, unitaire (coefficient dominant 1), de coefficient

constant $(-1)^n \det(f)$. Le coefficient de x^{n-1} est $-\mathrm{tr}(f)$. Analogue pour une matrice.

- Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique. Multiplicité.
- Pour $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathcal{M}_p(K)$ et $C \in \mathcal{M}_{n-p}(K)$, $\chi_M = \chi_A \times \chi_C$.
- Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, d'ordre de multiplicité m_λ, alors $1 \leqslant \dim(\ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)) \leqslant m_\lambda$.
- Lorsque χ_f est scindé, $\mathrm{tr}(f) = \sum\limits_{\lambda \in sp(f)} m_\lambda.\lambda$ et $\det(f) = \prod\limits_{\lambda \in Sp(f)} \lambda^{m_\lambda}$.

4. Endomorphismes et matrices diagonalisables

- Définition de : endomorphisme diagonalisable (peut être représenté par une matrice diagonale), matrice diagonalisable (semblable à une matrice diagonale). f est diagonalisable ssi toute matrice associée à f l'est, A est diagonalisable ssi l'endomorphisme canoniquement associé l'est.
  f diagonalisable ssi il existe une base de E formée de vecteurs propres. C'est dans une base de ce type que l'on peut obtenir une matrice diagonale associée à f.
- *Cas particulier à connaître* : $\boxed{(f \text{ admet une seule vp et } f \text{ diagonalisable}) \Leftrightarrow f \text{ homothétie}}$.
  Donc si f admet une seule valeur propre λ et n'est pas égal à $\lambda \mathrm{Id}_E$, c'est que f n'est pas diagonalisable.
  Analogue pour les matrices.
- *Exemples à connaître* : Projecteurs et symétries son toujours diagonalisables, homothéties aussi.

  Conditions nécessaires et suffisantes

$$
\begin{aligned}
f \in L(E) \text{ diagonalisable} \quad & \Leftrightarrow \quad E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} \ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E) \\
& \Leftrightarrow \quad \dim(E) = \sum_{\lambda \in sp(f)} \dim(\ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)) \\
& \Leftrightarrow \quad \chi_f \text{ scindé et pour tout } \lambda \in Sp(f),\ \dim(\ker(f - \lambda \mathrm{Id}_E)) = m_\lambda \\
& \qquad\ \text{(dim du sev propre = ordre de multiplicité).}
\end{aligned}
$$

  Condition suffisante
  Si f admet n valeurs propres distinctes (en dimension n), alors f est diagonalisable. Réciproque fausse.

  Théorème spectral (1ère version) : Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.
  Admis pour l'instant. Pas de notion de matrice de passage orthogonale, ni d'endomorphisme autoadjoint pour l'instant.