SÉRIES ENTIÈRES

1. *Convergence* :
   - Lemme d'Abel.
   - Définition du *rayon de convergence* de $\sum a_n z^n$ et du disque ouvert de convergence :
     $$R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+^*,\ (a_n r^n) \text{ est bornée}\},\ R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$
     Si $|z| < R$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge absolument ; si $|z| > R$, elle diverge grossièrement.
     $\to$ Application : si $\sum a_n x_0^n$ diverge, alors $R \leqslant |x_0|$; si $(a_n x_1^n)$ converge vers 0, alors $R \geqslant |x_1|$, etc.
     $\to$ *Utilisation de la règle de d'Alembert.* On peut employer $R = \frac{1}{\ell}$ pour $\sum a_n z^n$ si $a_n \neq 0$ pour tout n et si $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \ell$, mais on peut aussi choisir d'appliquer systématiquement la règle concernant les séries numériques (en étudiant $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ avec $u_n = a_n x^n$, ou $a_n x^{2n+1}$, ou.... selon la série étudiée).
     Cas des séries entières lacunaires : on doit appliquer la règle de d'Alembert à la série numérique (sur le terme général, contenant la variable).
   - Comparaison de rayons de convergence. Si $a_n = \mathcal{O}(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$. Si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R_a = R_b$.
   - Pour toute suite complexe (a_n), les séries entières $\sum a_n z^n$, $\sum n a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{a_n z^n}{n}$ ont même rayon de convergence.
   - *Opérations sur les séries entières* : Somme, combinaison linéaire, produit de Cauchy (le rayon de convergence de la somme ou du produit est supérieur ou égal au minimum des deux).

2. *Régularité de la fonction somme* :
   - Sur tout segment inclus dans $]-R, R[$, la série entière réelle $\sum a_n x^n$, et ses séries dérivées, convergent normalement. La fonction somme est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ (et expression des dérivées successives). Lien entre a_n et $f^{(n)}(0)$.
   - *Deux méthodes à connaître pour justifier, si c'est possible, la continuité en R et/ou en $-R$.*
     (i) Lorsque $\sum a_n R^n$ converge absolument, la série entière converge normalement sur $[-R, R]$. Dans ce cas, f est continue sur $[-R, R]$.
     (ii) Parfois on peut utiliser le TSSA pour obtenir la convergence uniforme sur $[0, R]$, ou sur $[-R, 0]$ (caractérisation de la convergence uniforme avec les restes, résultat sur les restes donné par le TSSA).
     Tout autre théorème radial est hors programme.
   - Primitives de la fonction somme de $\sum a_n x^n$, obtenues par intégration terme à terme sur $]-R, R[$.

3. *Fonction développable en série entière sur un intervalle $]-\alpha, \alpha[$* :
   - Si f est développable en série entière sur $]-\alpha, \alpha[$, alors elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\alpha, \alpha[$ et les coefficients a_n sont uniques : ce sont les $\frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$ (donc f est égale à la fonction somme de sa série de Taylor sur $]-\alpha, \alpha[$). Réciproque fausse.
   - L'ensemble des fonctions développables en série entière au voisinage de 0 est stable par combinaison linéaire et par produit.
   - Développements en série entière à connaître : exp, cos, sin, ch, sh sur $\mathbb{R}$; $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $x \mapsto -\ln(1-x)$, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \operatorname{Arctan}(x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$ sur $]-1, 1[$.