SÉRIES ENTIÈRES – FAMILLES SOMMABLES

1. *Convergence* :
   - Lemme d'Abel.
   - Définition du *rayon de convergence* de $\sum a_n z^n$ et du disque ouvert de convergence :
   $$R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+^*,\ (a_n r^n) \text{ est bornée}\},\ R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$
   Si $|z| < R$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge absolument ; si $|z| > R$, elle diverge grossièrement.
   $\rightarrow$ Application : si $\sum a_n x_0^n$ diverge, alors $R \leqslant |x_0|$; si $(a_n x_1^n)$ converge vers 0, alors $R \geqslant |x_1|$, etc.
   $\rightarrow$ *Utilisation de la règle de d'Alembert.* On peut employer $R = \frac{1}{\ell}$ pour $\sum a_n z^n$ si $a_n \neq 0$ pour tout n et si $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \ell$, mais on peut aussi choisir d'appliquer systématiquement la règle concernant les séries numériques (en étudiant $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ avec $u_n = a_n x^n$, ou $a_n x^{2n+1}$, ou.... selon la série étudiée). Cas des séries entières lacunaires : on doit appliquer la règle de d'Alembert à la série numérique (sur le terme général, contenant la variable).
   - Comparaison de rayons de convergence. Si $a_n = \mathcal{O}(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$. Si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R_a = R_b$.
   - Pour toute suite complexe (a_n), les séries entières $\sum a_n z^n$, $\sum n a_n z^n$ et $\sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n z^n}{n}$ ont même rayon de convergence.
   - *Opérations sur les séries entières* : Somme, combinaison linéaire, produit de Cauchy (le rayon de convergence de la somme ou du produit est supérieur ou égal au minimum des deux).

2. *Régularité de la fonction somme* :
   - Sur tout segment inclus dans $]-R, R[$, la série entière réelle $\sum a_n x^n$, et ses séries dérivées, convergent normalement. La fonction somme est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ (et expression des dérivées successives). Lien entre a_n et $f^{(n)}(0)$.
   - *Deux méthodes à connaître pour justifier, si c'est possible, la continuité en R et/ou en $-R$.*
   (i) Lorsque $\sum a_n R^n$ converge absolument, la série entière converge normalement sur $[-R, R]$. Dans ce cas, f est continue sur $[-R, R]$.
   (ii) Parfois on peut utiliser le TSSA pour obtenir la convergence uniforme sur $[0, R]$, ou sur $[-R, 0]$ (caractérisation de la convergence uniforme avec les restes, résultat sur les restes donné par le TSSA).
   Tout autre théorème radial est hors programme.
   - Primitives de la fonction somme de $\sum a_n x^n$, obtenues par intégration terme à terme sur $]-R, R[$.

3. *Fonction développable en série entière sur un intervalle $]-\alpha, \alpha[$* :
   - Si f est développable en série entière sur $]-\alpha, \alpha[$, alors elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\alpha, \alpha[$ et les coefficients a_n sont uniques : ce sont les $\frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$ (donc f est égale à la fonction somme de sa série de Taylor sur $]-\alpha, \alpha[$). Réciproque fausse.
   - L'ensemble des fonctions développables en série entière au voisinage de 0 est stable par combinaison linéaire et par produit.
   - Développements en série entière à connaître : exp, cos, sin, ch, sh sur $\mathbb{R}$; $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $x \mapsto -\ln(1-x)$, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \mathrm{Arctan}(x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$ sur $]-1, 1[$.

ENSEMBLES DÉNOMBRABLES ET FAMILLES SOMMABLES

En introduction aux chapitres de Probabilités.
- Ensemble dénombrable : seulement la définition. Ensemble au plus dénombrable.
- *Famille sommable d'éléments de* $[0, +\infty]$.
Pour une **famille de réels positifs** indexée par un ensemble dénombrable : si le calcul ne fait pas apparaître de série divergente, on dit que la famille est sommable et sa somme est calculée. Si le calcul fait apparaître une série divergente, la famille n'est pas sommable et sa somme vaut $+\infty$. (En particulier si l'un des termes de la famille est $+\infty$...)

Extrait du programme : En pratique, dans le cas positif, les étudiants peuvent découper, calculer et majorer leurs sommes directement, la finitude de la somme valant preuve de sommabilité.
Le calcul effectué peut donc utiliser un découpage (paquets), un échange de sommes (Fubini) : pas de justification dans le cas réel positif d'après ce qui précède.

- *Familles dénombrables quelconques* : si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille dénombrable de complexes, on dit qu'elle est sommable si la famille de réels positifs $(|x_i|)_{i\in I}$ est sommable.
- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable ssi la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ converge absolument. Si $|x_i| \leqslant a_i$ pour tout i et si (a_i) est sommable, alors (x_i) est sommable.
- *Sommation par paquets* : Si $(x_i)_{i\in I}$ est sommable, pour tout découpage $I = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ (union disjointe), on a $\sum\limits_{i\in I} x_i = \sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{i\in I_n} x_i\right)$.
- *Théorème de Fubini* : échange des sommes dans le cas d'une famille sommable indexée par des couples $(i, j) \in I \times J$ où I et J sont dénombrables.