ESPACES PROBABILISÉS – VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

1. Ensembles dénombrables, familles sommables.

- Ensemble dénombrable : seulement la définition. Ensemble au plus dénombrable.
- *Famille sommable d'éléments de* $[0, +\infty]$.
  Extrait du programme : En pratique, dans le cas positif, les étudiants peuvent découper, calculer et majorer leurs sommes directement, la finitude de la somme valant preuve de sommabilité.
  Le calcul effectué peut donc utiliser un découpage (paquets), un échange de sommes (Fubini) : pas de justification dans le cas réel positif d'après ce qui précède.
- *Familles dénombrables quelconques* : une famille dénombrable de complexes $(x_i)_{i\in I}$ est sommable lorsque la famille de réels positifs $(|x_i|)_{i\in I}$ est sommable.
- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable ssi la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ converge absolument. Si $|x_i| \leqslant y_i$ pour tout i et si (y_i) est sommable, alors (x_i) est sommable.
- *Sommation par paquets, théorème de Fubini* : peuvent être appliqués lorsqu'on a justifié que la famille est sommable.

2. Tribu, probabilité.

- Tribu $\mathcal{A}$ d'événements sur un univers quelconque. Rien de plus que les définitions.
- <u>*Probabilité sur*</u> $(\Omega, \mathcal{A})$:
  (a) Application de $\mathcal{A}$ vers $[0, 1]$ vérifiant : $P(\Omega) = 1$ et la σ-additivité : $P(\bigcup\limits_{i\in I} A_i) = \sum\limits_{i\in I} P(A_i)$ lorsque $(A_i)_{i\in I}$ est une famille finie ou dénombrable d'événements 2 à 2 incompatibles.
  (b) Définition d'une probabilité à partir d'une *distribution de probabilité* : suite (p_k) finie ou infinie de réels positifs, tq $\sum p_k = 1$; on a alors $P(\{\omega_k\}) = p_k$ pour $\omega_k \in \Omega$, et on obtient $P(A)$, pour un événement quelconque A, par somme. Cas de l'équiprobabilité.
  (c) Propriétés de l'application P : $P(\varnothing)$, $P(\overline{A})$, $P(A\backslash B) = P(A) - P(A\cap B)$, $P(A\cup B)$; si $B \subset A$, $P(B) \leqslant P(A)$, si $P(A) = 0$ alors $P(A\cap B) = 0$ pour tout événement B.

- <u>*Théorème de continuité croissante, continuité décroissante*</u> :
  (a) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'événements, alors la suite $(P(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\lim\limits_{+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$.
  (b) Analogue pour une suite décroissante d'événements : $\lim\limits_{+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)$.
  (c) Corollaires : pour toute suite (A_n) (finie ou dénombrable) d'événements,
  $$P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \quad \text{et} \quad P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$$
  et $P(\bigcup A_n) \leqslant \sum P(A_n)$ (sous-additivité, la somme pouvant être $+\infty$).
  (d) Notion d'événement négligeable ($P(A) = 0$), d'événement presque sûr ($P(A) = 1$). Exemples.

3. Probabilités conditionnelles – Événements indépendants.

- Définition de $P_B(A)$ lorsque $P(B) \neq 0$. On a alors $P(A\cap B) = P(B) \times P_B(A)$ (et si $P(B) = 0$, alors $P(A\cap B) = 0$ aussi). Si $P(B) > 0$, l'application P_B est une probabilité sur Ω.
- Probabilités composées pour calculer $P(A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_N)$
- Système complet d'événements (fini ou dénombrable). Système quasi-complet : les A_i sont deux à deux incompatibles et $\sum P(A_i) = 1$.
- Formule des probabilités totales, formule de Bayes.

- A et B indépendants si $P(A\cap B) = P(A)P(B)$ (ou $P_B(A) = P(A)$ si $P(B) > 0$).
- Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B sont indépendants, etc.
- Famille finie d'événements mutuellement indépendants : la probabilité de **toute** intersection (sans répétition) est le produit des probabilités. On peut remplacer un ou plusieurs événements par leur

contraire, les événements sont encore mutuellement indépendants.
- L'indépendance mutuelle entraîne l'indépendance deux à deux. Réciproque fausse.

VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES (sans espérance et variance pour l'instant)

- Définition d'une variable aléatoire discrète ($X(\Omega)$ est un ensemble au plus dénombrable), loi de probabilité.
  $P(X \in U) = \sum_{x \in U} P(X = x)$ lorsque $U \subset X(\Omega)$.
  Fonction d'une variable aléatoire : $\varphi(X)$ si $X(\Omega) \subset \mathcal{D}_\varphi$. Quelques exemples.

- Révisions des lois de probabilités finies vues en première année : loi de Bernoulli, loi binomiale, loi uniforme sur $\{1, ..., N\}$ ou sur un ensemble fini quelconque.
- Loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$:
  Loi de probabilité, modèle d'expérience aléatoire conduisant à une loi géométrique (rang d'apparition d'un premier succès sur une suite infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes). $P_{X>n}(X > n+k) = P(X > k)$ (loi sans mémoire).
- Loi de Poisson de paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

- Couples : loi conjointe, lois marginales, loi conditionnelle de Y sachant un événement A. Dans la pratique : les lois conditionnelles de Y sachant $(X = x)$ pour tout $x \in X(\Omega)$, utilisées avec la loi marginale de X, permettent d'obtenir la loi conjointe de (X, Y) puis et la loi marginale de Y.
- Utilisation de la loi conjointe pour obtenir des probabilités telles que $P(X + Y = k)$, $P(X = Y)$, $P(X \in U, Y \in V)$ etc.

- Indépendance de v.a.d. (deux ou une suite) ; notation $X \perp\!\!\!\perp Y$ pour deux variables. Si les variables d'une suite sont indépendantes, alors elles sont deux à deux indépendantes (réciproque fausse).
- Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $\varphi(X) \perp \psi(Y)$ lorsque c'est défini. Généralisation à une suite : on peut composer chaque v.a.d. d'une suite de variables indépendantes par une fonction, l'indépendance est conservée.
- Lemme des coalitions : si $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes alors $f(X_1, ..., X_m) \perp\!\!\!\perp g(X_{m+1}, ..., X_n)$ (lorsque c'est défini).