Révisions et compléments sur les fonctions réelles et les intégrales sur un segment

— Fonctions usuelles, développements limités, primitives usuelles.

— Fonctions continues par morceaux sur un segment, intégration sur un segment, propriétés de l'intégrale des fonctions cpm sur un segment : linéarité, positivité, inégalités triangulaire et de Cauchy-Schwarz. Stricte positivité de l'intégrale d'une fonction **continue**, positive et non identiquement nulle.

— **Théorème fondamental de l'Analyse**.

— Formule de Taylor avec reste intégral.

Intégrales généralisées :

- Fonctions continues par morceaux sur un intervalle quelconque, définition de la convergence (ou divergence) d'une intégrale sur un intervalle I quelconque.
  Cas où f est positive : $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ (si $a \in \mathbb{R}$) est croissante, $x \mapsto \int_x^b f(t)\mathrm{d}t$ (si $b \in \mathbb{R}$) est décroissante (donc les intégrales généralisées convergent si et seulement si ces fonctions sont majorées).

- *Propriétés et méthodes de calcul* :
  Linéarité de l'intégrale, positivité. **Stricte positivité pour les fonctions continues**. Intégration par parties. Changement de variable. Application au cas des fonctions paires ou impaires (dont l'intégrale converge !) sur $]-a, a[$.

- *Intégrale absolument convergente, fonctions intégrables sur un intervalle qcq.*
  La convergence absolue entraîne la convergence, la réciproque est fausse. L'étude des intégrales semi-convergentes est hors programme. Une fonction f continue par morceaux sur I est dite **intégrable** sur I lorsque l'intégrale de f sur I est absolument convergente.

- *Fonctions intégrables de référence, intégrales de référence* :
  (a) $x \mapsto \dfrac{1}{x^\alpha}$ intégrable sur $[0, +\infty[$ ssi $\alpha > 1$, intégrable sur $]0, 1]$ ssi $\alpha < 1$;
  $t \mapsto \dfrac{1}{(t-a)^\alpha}$ sur $]a, b]$ ou $t \mapsto \dfrac{1}{(b-t)^\alpha}$ sur $[a, b[$ ssi $\alpha < 1$ (a ou b sont des bornes finies) ;
  $x \mapsto e^{-\lambda x}$ sur $[0, +\infty[$ ssi $\lambda > 0$; $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0, 1]$; $x \mapsto \dfrac{1}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.
  (b) Une fonction continue sur $]a, b]$ (a borne finie) et prolongeable par continuité en a est intégrable sur $]a, b]$. Analogue pour $[a, b[$.
  (c) $t \mapsto e^{-t^2/2}$ et $t \mapsto e^{-t^2}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$. Les valeurs des intégrales (sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}^+$) sont à connaître. On peut en connaître une et retrouver les autres par changement de variable ou par parité.

- *Théorème de comparaison pour étudier l'intégrabilité* :
  (i) Si f et g sont continues par morceaux sur I, avec $|f| \leqslant |g|$ sur I, alors :
  (g intégrable sur I) $\Rightarrow$ (f intégrable sur I) (donc f non intégrable $\Rightarrow$ g non intégrable).
  (ii) Si f et g sont continues par morceaux sur $I = [a, b[$ et si $f = \mathcal{O}(g)$ ou $f = o(g)$ en b, alors
  (g intégrable sur I) $\Rightarrow$ (f intégrable sur I) (donc f non intégrable $\Rightarrow$ g non intégrable).
  (Analogue pour $I =]a, b]$).
  (iii) Si f et g sont cpm sur $I = [a, b[$ et si $f \sim g$ en b, alors f intégrable $\Leftrightarrow$ g intégrable.
  (Analogue pour $I =]a, b]$).

- Espace vectoriel $L^1(I, \mathbb{K})$ des fonctions intégrables sur I. Comparaison série-intégrale (révision).

Les intégrales de Bertrand ont été vues en cours, les fonctions de carré intégrables ont été vues en exercice, mais ces deux notions ne sont pas au programme. Il faut donc savoir refaire la démarche (dans chaque cas particulier, en ce qui concerne les intégrales de Bertrand).