## I. RÉDUCTION : *notamment la fin du chapitre qui n'était pas au programme il y a deux semaines.*

Diagonalisabilité avec les polynômes annulateurs

Un endomorphisme en dimension finie (ou une matrice) est diagonalisable si et seulement si il existe un **polynôme annulateur** de cet endomorphisme (ou cette matrice) **scindé à racines simples**. Démo non exigible pour le sens $\boxed{\Leftarrow}$.

Il faut savoir que si $f$ est diagonalisable, alors il annule le polynôme (scindé à racines simples) $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} (X-\lambda)$.

*Le polynôme minimal n'est pas au programme.*

Trigonalisation

- $A$ est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire. Si on obtient une matrice triangulaire supérieure dans $\mathcal{B}$, on a une matrice triangulaire inférieure dans $\mathcal{B}'$ obtenue en inversant l'ordre des vecteurs.
- $f$ est trigonalisable s'il peut être représenté par une matrice triangulaire supérieure dans une certaine base. C'est le cas si et seulement si n'importe quelle matrice associée à $f$ est trigonalisable.
- $A$ ou $f$ est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé (démo non exigible pour le sens $\boxed{\Leftarrow}$). Donc toute matrice carrée est trigonalisable dans $\mathbb{C}$.
  *Tout exercice portant sur la trigonalisation doit contenir des indications. Sauf en dimension 2, ou en dimension 3 avec deux valeurs propres. Les notions de sous-espaces caractéristiques, de réduction de Jordan (ou tout autre méthode générale) sont hors-programme.*

Applications classiques de la diagonalisation

- Matrices semblables ou non. Recherche des puissances ou de l'inverse d'une matrice diagonalisable....
- Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants (et homogènes). Systèmes linéaires de suites récurrentes. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 ou plus.

## II. NORMES SUR UN ESPACE VECTORIEL ET SUITES VECTORIELLES :

*Normes et vocabulaire lié à cette notion* :

- Normes (définition), distance, boule ouverte, fermée, sphère. Normes usuelles $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$, dessin des trois boules unités dans $\mathbb{R}^2$ pour ces trois normes.
- Normes euclidiennes : si $\varphi$ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-ev $E$ alors $x \mapsto \sqrt{(x \mid x)}$ est une bien norme sur $E$.
- Norme infinie sur l'ev des fonctions bornées sur $I$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ : $\|f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x)|$.
- **Normes équivalentes** : définition, symétrie de la relation "être équivalente à" pour les normes. Exemple dans $\mathbb{K}^n$, contre-exemple dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.
  *Théorème admis* : En dimension finie toutes les normes sont équivalentes.
- Partie bornée d'un evn. Suites bornées, fonctions bornées.

*Propriétés des suites convergentes dans un e.v.n.*

- Définition de la convergence d'une suite d'éléments de $(E, \|.\|)$.
- Toute suite convergente est bornée. Unicité de la limite. Invariance de ces résultats par passage à une norme équivalente. Utilisation de suites pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes.
- Combinaison linéaire de suites convergentes ; multiplication d'une suite d'éléments de $E$ convergente par une suite de scalaires convergente.
- En dimension finie ($\dim(E) = k$), pour étudier la convergence (et la limite éventuelle) d'une suite $(u_n)$ d'éléments de $E$, on peut fixer une base de $E$ et étudier les $k$ suites $(u_n^{(1)})$, $(u_n^{(2)})$, ..., $(u_n^{(k)})$ définies par les coordonnées des $u_n$.
  Cas déjà connu des suites de complexes (on étudie la suite des parties réelles et la suite des parties imaginaires), cas particuliers des suites de $\mathbb{K}^k$ ou des suites de matrices (on étudie coefficient par coefficient).