NORMES SUR UN ESPACE VECTORIEL ET SUITES VECTORIELLES :

Normes et vocabulaire lié à cette notion :

- Normes (définition), distance, boule ouverte, fermée, sphère. Normes usuelles $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$, dessin des trois boules unités dans $\mathbb{R}^2$ pour ces trois normes.
- Normes euclidiennes : si φ est un produit scalaire sur le $\mathbb{R}$-ev E alors $x \mapsto \sqrt{(x \mid x)}$ est une bien norme sur E.
- Norme infinie sur l'ev des fonctions bornées sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$: $\|f\|_\infty = \sup_{x\in I}|f(x)|$.
- **Normes équivalentes** : définition, symétrie de la relation "être équivalente à" pour les normes. Exemple dans $\mathbb{K}^n$, contre-exemple dans $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$.
  Théorème admis : En dimension finie toutes les normes sont équivalentes.
- Partie bornée d'un evn. Suites bornées, fonctions bornées.

Propriétés des suites convergentes dans un e.v.n.

- Définition de la convergence d'une suite d'éléments de $(E, \|.\|)$.
- Toute suite convergente est bornée. Unicité de la limite. Invariance de ces résultats par passage à une norme équivalente. Utilisation de suites pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes.
- Combinaison linéaire de suites convergentes ; multiplication d'une suite d'éléments de E convergente par une suite de scalaires convergente.
- En dimension finie ($\dim(E) = k$), pour étudier la convergence (et la limite éventuelle) d'une suite (u_n) d'éléments de E, on peut fixer une base de E et étudier les k suites $(u_n^{(1)})$, $(u_n^{(2)})$, ..., $(u_n^{(k)})$ définies par les coordonnées des u_n.
  Cas déjà connu des suites de complexes (on étudie la suite des parties réelles et la suite des parties imaginaires), cas particuliers des suites de $\mathbb{K}^k$ ou des suites de matrices (on étudie coefficient par coefficient).

SUITES DE FONCTIONS :

Modes de convergence :

- Convergence **simple** d'une suite de fonctions.
- Convergence **uniforme** sur I d'une suite de fonctions : $\|u_n - u\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ où u est la limite simple.
- Convergence **uniforme sur tout segment** de I. La convergence uniforme sur tout segment n'implique pas la convergence uniforme sur I.
- Convergence Uniforme $\Rightarrow$ Convergence Simple. Réciproque fausse.

Propriétés de la fonction limite d'une suite de fonctions :

- Pour une suite de fonctions toutes continues sur I, et convergeant uniformément sur I (ou sur tout segment de I), la fonction limite est continue sur I. On utilise aussi la contraposée pour montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément vers sa limite simple.
  Pas de théorème de la double limite (avec $\lim\limits_{n\to+\infty}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}$ par exemple) pour les suites de fonctions au programme de PC. Le seul échange de limites correspond à la continuité en un point de l'ensemble de définition.

- **Échange limite-intégrale sur un segment** : si les fonctions u_n sont continues sur $[a,b]$ et si la suite (u_n) converge uniformément sur $[a,b]$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_a^b u_n(t)\mathrm{d}t\right) = \int_a^b u(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(t)\right)\mathrm{d}t$.
  Primitivation : avec convergence uniforme sur tout segment de I, la primitive s'annulant en a de la fonction limite u est la limite de la suite des primitives s'annulant en a des u_n.

- **Intégrales sur un intervalle quelconque : Théorème de convergence dominée**.
  Il est écrit dans le programme : pour l'application pratique, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux.

Énoncé pratique : Soit (f_n) une suite de fonctions (cpm) sur I. On suppose que la suite de fonctions (f_n) vérifie :

(i) (f_n) **converge simplement** sur I vers une fonction f (cpm) ;

(ii) **Hypothèse de domination** : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, |f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$ où φ est une fonction intégrable sur I et indépendante de n.

Alors les fonctions f_n et la fonction f sont intégrables sur I et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\displaystyle\int_I f_n(t)\mathrm{d}t\right) = \displaystyle\int_I \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t$.

Rq : Lorsque l'intervalle d'intégration est borné, on peut (parfois) dominer par une fonction constante qui est alors bien intégrable sur l'intervalle borné.

On sera attentif à l'intégrabilité de φ sur tout l'intervalle d'intégration (on évite par exemple de dominer par $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$), quitte à découper l'intervalle et utiliser une fonction φ continue par morceaux.

La fonction φ doit être indépendante du paramètre n, donc en cas de fonction cpm, les intervalles concernant les différents morceaux sont également indépendants de n.