I. SUITES DE FONCTIONS

Modes de convergence :

- Convergence **simple** sur I. Convergence **uniforme** sur I : $\|u_n - u\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ où u est la limite simple. Convergence **uniforme sur tout segment** de I. La convergence uniforme sur tout segment n'implique pas la convergence uniforme sur I.
  Convergence Uniforme $\Rightarrow$ Convergence Simple. Réciproque fausse.

  Exemple à connaître : Pour $u_n : t \mapsto t^n$, $n \in \mathbb{N}$: convergence simple (on doit retrouver l'intervalle $I =]-1,1]$ et la limite simple) ; non convergence uniforme sur $[0,1]$, sur $[0,1[$, convergence uniforme sur tout segment $[0,b]$ avec $b < 1$. Pour la non convergence uniforme sur $[0,1]$, on peut exploiter la discontinuité en 1 de la limite simple. Mais pour la non convergence uniforme sur $[0,1[$, il faut revenir à la définition.

Propriétés de la fonction limite d'une suite de fonctions :

- Pour une suite de fonctions toutes continues sur I, et convergeant uniformément sur I (ou sur tout segment de I), la fonction limite est continue sur I. On utilise aussi la contraposée pour montrer qu'une suite de fonctions ne converge pas uniformément vers sa limite simple.

  Pas de théorème de la double limite pour les suites de fonctions au programme de PC. Le seul échange de limites correspond à la continuité en un point de l'ensemble de définition.

- **Échange limite-intégrale sur un segment (avec convergence uniforme).**
  Si les fonctions u_n sont continues sur $[a,b]$ et si la suite (u_n) converge uniformément sur $[a,b]$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_a^b u_n(t)\mathrm{d}t\right) = \int_a^b u(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \left(\lim\limits_{n\to+\infty} u_n(t)\right)\mathrm{d}t.$
  Primitivation : avec convergence uniforme sur tout segment de I, la primitive s'annulant en a de la fonction limite u est la limite de la suite des primitives s'annulant en a des u_n.

- **Théorème de convergence dominée** (Échange limite-intégrale sur un intervalle quelconque).
  Il est écrit dans le programme : pour l'application pratique, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux.
  Énoncé pratique : Soit (f_n) une suite de fonctions (cpm) sur I. On suppose que la suite de fonctions (f_n) vérifie :
  (i) (f_n) **converge simplement** sur I vers une fonction f (cpm) ;
  (ii) **Hypothèse de domination** : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, |f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$ où φ est une fonction intégrable sur I et indépendante de n.
  Alors les fonctions f_n et la fonction f sont intégrables sur I et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\int_I f_n(t)\mathrm{d}t\right) = \int_I \left(\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t.$
  Rq : Lorsque l'intervalle d'intégration est borné, on peut (parfois) dominer par une fonction constante qui est alors bien intégrable sur l'intervalle borné.
  On sera attentif à l'intégrabilité de φ sur tout l'intervalle d'intégration (on évite par exemple de dominer par $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ sur $\mathbb{R}_+^*$), quitte à découper l'intervalle et utiliser une fonction φ continue par morceaux.
  La fonction φ doit être indépendante du paramètre n, donc en cas de fonction cpm, les intervalles concernant les différents morceaux sont également indépendants de n.

- **Dérivation** : si les u_n sont toutes de classe $\mathcal{C}^1$, si la suite (u_n) converge simplement, et la suite (u_n') converge uniformément sur I (ou sur tout segment), alors la fonction limite u est de classe $\mathcal{C}^1$ et $u' = \lim(u_n')$.
  Pour la classe $\mathcal{C}^k$, on utilise directement : si les u_n sont toutes de classe $\mathcal{C}^k$, si les suites (u_n), (u_n'), ..., $(u_n^{(k-1)})$ convergent simplement, et si la suite $(u_n^{(k)})$ converge uniformément sur I (ou sur tout segment), alors la fonction limite u est de classe $\mathcal{C}^k$ et $u^{(i)} = \lim(u_n^{(i)})$ pour tout $i \in [\![1,k]\!]$.

II. SÉRIES DE FONCTIONS

Modes de convergence :

- Convergence **simple** d'une série de fonctions. L'étude de la CVS permet d'obtenir l'ensemble de définition de la fonction somme.
- Convergence **normale** sur I d'une série de fonctions : $\sum \|u_n\|_\infty$ converge. Convergence normale sur tout segment de I.
- Convergence **uniforme sur I d'une série** de fonctions, convergence uniforme sur tout segment.
  $\sum f_n$ CVU sur I ssi $\begin{cases} \text{la série converge simplement sur } I \\ \text{et } \|R_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases}$ où $R_n : x \mapsto S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$.
  Convergence Normale $\Rightarrow$ Convergence Uniforme $\Rightarrow$ Convergence Simple. Réciproques fausses.
  Les convergences uniforme ou normale "locales" (sur tout segment, ou sur tout $[a, +\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$) n'impliquent pas de convergence globale uniforme ou normale sur I.
- *Exemples à revoir* :
  - ∗ Fonction $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$ définie sur $]1, +\infty[$. Convergence normale sur tout segment ou tout intervalle $[a, +\infty[\ \subset\ ]1, +\infty[$.
  - ∗ $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n x^n}{n}$: convergence simple sur $]-1, 1]$; non convergence normale sur $]-1, 1]$, convergence uniforme sur $[0, 1]$ (TSSA).

Étude de la fonction somme d'une série de fonctions :

- Théorème de **continuité** (les fonctions u_n sont continues et la série converge uniformément, au moins sur tout segment). Théorème de la **double limite** (les fonctions ont une limite finie et a et la série converge uniformément sur un intervalle I dont a est une borne).
  La fonction ζ est continue sur $]1, +\infty[$ et $\lim_{x\to+\infty} \zeta(x) = 1$ (par théorème de la double limite). Le théorème de la double limite est en défaut pour $x \to 1^+$, on en déduit que la série de fonctions ne converge pas uniformément sur $]1, +\infty[$ (ni sur des intervalles de la forme $]1, b]$).
- **Dérivation** (terme à terme) de la fonction somme, lorsque la série des dérivées converge uniformément (ou normalement, éventuellement sur tout segment). Énoncé pour la classe $\mathcal{C}^k$ (convergence simple de $\sum u_n$, $\sum u_n'$, ..., $\sum u_n^{(k-1)}$, et CVU ou CVN, éventuellement sur les segments, de $\sum u_n^{(k)}$).

Théorèmes d'intégration terme à terme.

- **Sur un segment** $[a, b]$, lorsqu'il y a convergence normale ou uniforme sur $[a, b]$. Application pour l'obtention de primitives de la fonctions somme.
  Exemple à connaître : $\forall x \in\ ]-1, 1[,\ \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \ln(1 + x)$.
- **Sur un intervalle quelconque**.
  Il est écrit dans le programme : pour l'application pratique, on vérifie les hypothèses de convergence simple et convergence de la série des intégrales des modules, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux.
  Énoncé pratique : Soit $\sum f_n$ une série de fonctions vérifiant les hypothèses suivantes :
  (i) Pour tout n, f_n est intégrable sur I.
  (ii) La série de fonctions converge simplement sur I (fonction somme cpm sur I).
  (iii) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\int_I |f_n(t)| \mathrm{d}t \right)$ converge.
  Alors $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est intégrable sur U, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\int_I f_n(t) \mathrm{d}t \right)$ converge, et $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(t) \mathrm{d}t \right) = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) \mathrm{d}t$.