I. SÉRIES DE FONCTIONS

Modes de convergence :

- Convergence **simple**, ensemble de définition de la fonction somme.
- Convergence **normale** sur I : $\sum \|u_n\|_\infty$ converge. Convergence normale sur tout segment de I.
- Convergence **uniforme sur** I, convergence uniforme sur tout segment.

  $\sum f_n$ CVU sur I ssi $\begin{cases} \text{la série converge simplement sur } I \\ \text{et } \|R_n\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{cases}$ où $R_n : x \mapsto S(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x)$.

  Convergence Normale $\Rightarrow$ Convergence Uniforme $\Rightarrow$ Convergence Simple. Réciproques fausses.
  Les convergences uniforme ou normale "locales" (sur tout segment, ou sur tout $[a, +\infty[\subset \mathbb{R}_+^*$) n'impliquent pas de convergence globale uniforme ou normale sur I.

Étude de la fonction somme d'une série de fonctions :

- Théorème de **continuité**. Théorème de la **double limite**.
- **Dérivation** (terme à terme) de la fonction somme, lorsque la série des dérivées converge uniformément (ou normalement, éventuellement sur tout segment). Énoncé pour la classe $\mathcal{C}^k$ (convergence simple de $\sum u_n$, $\sum u_n'$, ..., $\sum u_n^{(k-1)}$, et CVU ou CVN, éventuellement sur les segments, de $\sum u_n^{(k)}$).
- <u>*Exemples à revoir*</u> :
  - $*$ Étude complète de la fonction $\zeta : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. Classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, +\infty[$, limite en $+\infty$, limite et équivalent en 1^+ (comparaison avec une intégrale).
  - $*$ $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n x^n}{n}$: convergence simple sur $]-1, 1]$; non convergence normale sur $]-1, 1]$, convergence uniforme sur $[0, 1]$ (TSSA).

Théorèmes d'intégration terme à terme.

- **Sur un segment** $[a, b]$, lorsqu'il y a convergence normale ou uniforme sur $[a, b]$. Application pour l'obtention de primitives de la fonctions somme.

  Exemple à connaître : $\forall x \in]-1, 1[, \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = \ln(1 + x)$.
- **Sur un intervalle quelconque**.

  Il est écrit dans le programme : pour l'application pratique, on vérifie les hypothèses de convergence simple et convergence de la série des intégrales des modules, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux.

  <u>*Énoncé pratique*</u> : Soit $\sum f_n$ une série de fonctions vérifiant les hypothèses suivantes :
  (i) Pour tout n, f_n est intégrable sur I.
  (ii) La série de fonctions converge simplement sur I (fonction somme cpm sur I).
  (iii) $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\int_I |f_n(t)| \mathrm{d}t \right)$ converge.

  Alors $t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est intégrable sur U, $\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\int_I f_n(t) \mathrm{d}t \right)$ converge, et $\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_I f_n(t) \mathrm{d}t \right) = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t) \right) \mathrm{d}t$.

II. FONCTIONS DÉFINIES PAR UNE INTÉGRALE

- Savoir chercher l'ensemble de définition de $F : x \mapsto \int_I f(x, t) \mathrm{d}t$ (disjonction de cas pour obtenir les valeurs de x pour lesquelles l'intégrale généralisée converge), ou savoir vérifier que F est bien définie sur un intervalle donné (pas besoin d'étudier les autres valeurs de x dans ce cas).
- **Théorème de continuité sous l'intégrale** : échange $\lim_{x\to a}$ et $\int_J$.

  Pour l'application pratique, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à x et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux. Voir page suivante.

Énoncé pratique : Soit $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$, définie sur $I \times J$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On vérifie que
(i) Pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I.
(ii) **Hypothèse de domination** : $\forall x \in I$, $\forall t \in J$, $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ où φ est intégrable sur J et indépendante de x.

Alors $F : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur I.

Rq : On pourra avoir recours à une hypothèse de *domination locale* (en prenant le paramètre dans un segment quelconque inclus dans I, ou dans un intervalle quelconque $[a, +\infty[$ par exemple). L'intervalle d'intégration J ne change jamais.

- **Théorème de convergence dominée à paramètre continu** : échange $\lim\limits_{x\to a}$ et $\displaystyle\int_I$.

Pour l'application pratique, on vérifie les hypothèses de limite par rapport à x et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux.

Énoncé pratique : Soit $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ définie sur $I \times J$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit a une borne finie ou infinie de I. On suppose que f vérifie :
(i) Pour tout $t \in J$, $f(x,t) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell(t)$ (avec ℓ cpm sur J) ;
(ii) **Hypothèse de domination** : $\forall x \in I, \forall t \in J, |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ où φ est une fonction intégrable sur J et indépendante de x.

Alors ℓ est intégrable sur J et $\displaystyle\lim_{x\to a}\left(\int_J f(x,t)\mathrm{d}t\right) = \int_J \left(\lim_{x\to a} f(x,t)\right)\mathrm{d}t$.

Rq : On peut vérifier l'hypothèse de domination sur un sous-intervalle de I, à condition que ce soit bien un voisinage de a (par exemple $x \in [1, +\infty[$ lorsque $a = +\infty$).

- **Théorème de dérivation sous l'intégrale** : échange $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ et $\displaystyle\int_J$.

Énoncé pratique : Soit $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$, définie sur $J \times I$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que :
(i) Pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur J (souvent vu au préalable en étudiant l'ensemble de définition de F).
(ii) Pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I
(iii) **Hypothèse de domination** $\forall x \in I$, $\forall t \in J$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$ où φ est intégrable sur J et indépendante de x.

Alors $F : x \mapsto \displaystyle\int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I avec $F'(x) = \displaystyle\int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$.

Possibilité d'utiliser une *HD locale.* L'intervalle d'intégration ne change jamais.

- Généralisation pour montrer la classe $\mathcal{C}^k$: intégrabilité de $t \mapsto f(x,t)$ et des $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}$ pour $j \in [\![1, k-1]\!]$ et hypothèse de domination (éventuellement locale) pour $\dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}$.

Pour la classe $\mathcal{C}^\infty$, on montre que la fonction est de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ quelconque fixé.