I. FONCTIONS DÉFINIES PAR UNE INTÉGRALE

- Savoir chercher l'ensemble de définition de $F : x \mapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ (disjonction de cas pour obtenir les valeurs de x pour lesquelles l'intégrale généralisée converge), ou savoir vérifier que F est bien définie sur un intervalle donné (pas besoin d'étudier les autres valeurs de x dans ce cas).
- **Théorème de continuité sous l'intégrale** : échange $\lim\limits_{x\to a}$ et $\int_J$.
  Pour l'application pratique, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à x et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux.
  Énoncé pratique : Soit $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$, définie sur $I \times J$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On vérifie que
  (i) Pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I.
  (ii) **Hypothèse de domination** : $\forall x \in I$, $\forall t \in J$, $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ où φ est intégrable sur J et indépendante de x.
  Alors $F : x \mapsto \int_I f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur I.
  Rq : On pourra avoir recours à une hypothèse de *domination locale* (en prenant le paramètre dans un segment quelconque inclus dans I, ou dans un intervalle quelconque $[a,+\infty[$ par exemple). L'intervalle d'intégration J ne change jamais.
- **Théorème de convergence dominée à paramètre continu** : échange $\lim\limits_{x\to a}$ et $\int_I$.
  Pour l'application pratique, on vérifie les hypothèses de limite par rapport à x et de domination, sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux.
  Énoncé pratique : Soit $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$ définie sur $I \times J$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit a une borne finie ou infinie de I. On suppose que f vérifie :
  (i) Pour tout $t \in J$, $f(x,t) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \ell(t)$ (avec ℓ cpm sur J) ;
  (ii) **Hypothèse de domination** : $\forall x \in I, \forall t \in J$, $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$ où φ est une fonction intégrable sur J et indépendante de x.
  Alors ℓ est intégrable sur J et $\lim\limits_{x\to a}\left(\int_J f(x,t)\mathrm{d}t\right) = \int_J \left(\lim\limits_{x\to a} f(x,t)\right)\mathrm{d}t$.
  Rq : On peut vérifier l'hypothèse de domination sur un sous-intervalle de I, à condition que ce soit bien un voisinage de a (par exemple $x \in [1,+\infty[$ lorsque $a = +\infty$).
- **Théorème de dérivation sous l'intégrale** : échange $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ et $\int_J$.
  Énoncé pratique : Soit $f : (x,t) \mapsto f(x,t)$, définie sur $J \times I$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que :
  (i) Pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur J (souvent vu au préalable en étudiant l'ensemble de définition de F).
  (ii) Pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I
  (iii) **Hypothèse de domination** $\forall x \in I$, $\forall t \in J$, $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$ où φ est intégrable sur J et indépendante de x.
  Alors $F : x \mapsto \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur I avec $F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$.
  Possibilité d'utiliser une *HD locale.* L'intervalle d'intégration ne change jamais.
- Généralisation pour montrer la classe $\mathcal{C}^k$: intégrabilité de $t \mapsto f(x,t)$ et des $t \mapsto \frac{\partial^j f}{\partial x^j}$ pour $j \in [\![1, k-1]\!]$ et hypothèse de domination (éventuellement locale) pour $\frac{\partial^k f}{\partial x^k}$.
  Pour la classe $\mathcal{C}^\infty$, on montre que la fonction est de classe $\mathcal{C}^k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$ quelconque fixé.

II. SÉRIES ENTIÈRES

Convergence :

- Lemme d'Abel.
- Définition du *rayon de convergence* de $\sum a_n z^n$ et du disque ouvert de convergence :
$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+^*,\ (a_n r^n) \text{ est bornée}\},\ R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$
Si $|z| < R$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge absolument ; si $|z| > R$, elle diverge grossièrement.
$\rightarrow$ Application : si $\sum a_n x_0^n$ diverge, alors $R \leqslant |x_0|$; si $(a_n x_1^n)$ converge vers 0, alors $R \geqslant |x_1|$, etc.
$\rightarrow$ *Utilisation de la règle de d'Alembert.* On peut employer $R = \frac{1}{\ell}$ pour $\sum a_n z^n$ si $a_n \neq 0$ pour tout n et si $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \ell$, mais on peut aussi choisir d'appliquer systématiquement la règle concernant les séries numériques (en étudiant $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ avec $u_n = a_n x^n$, ou $a_n x^{2n+1}$, ou.... selon la série étudiée).
Cas des séries entières lacunaires : on doit appliquer la règle de d'Alembert à la série numérique (sur le terme général, contenant la variable).
- Comparaison de rayons de convergence. Si $a_n = \mathcal{O}(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$. Si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R_a = R_b$.
- Pour toute suite complexe (a_n), les séries entières $\sum a_n z^n$, $\sum n a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{a_n z^n}{n}$ ont même rayon de convergence.
- *Opérations sur les séries entières* : Somme, combinaison linéaire, produit de Cauchy (le rayon de convergence de la somme ou du produit est supérieur ou égal au minimum des deux).

Régularité de la fonction somme :

- Sur tout segment inclus dans $]-R, R[$, la série entière réelle $\sum a_n x^n$, et ses séries dérivées, convergent normalement. La fonction somme est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R, R[$ (et expression des dérivées successives).
Lien entre a_n et $f^{(n)}(0)$.
- *Deux **méthodes** à connaître pour justifier, si c'est possible, la continuité en R et/ou en $-R$.*
(i) Lorsque $\sum a_n R^n$ converge absolument, la série entière converge normalement sur $[-R, R]$. Dans ce cas, f est continue sur $[-R, R]$.
(ii) Parfois on peut utiliser le TSSA pour obtenir la convergence uniforme sur $[0, R]$, ou sur $[-R, 0]$ (caractérisation de la convergence uniforme avec les restes, résultat sur les restes donné par le TSSA).
Tout autre théorème radial est hors programme.
- Primitives de la fonction somme de $\sum a_n x^n$, obtenues par intégration terme à terme sur $]-R, R[$.

Fonction développable en série entière sur un intervalle $]-\alpha, \alpha[$:

- Si f est développable en série entière sur $]-\alpha, \alpha[$, alors elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\alpha, \alpha[$ et les coefficients a_n sont uniques : ce sont les $\frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$ (donc f est égale à la fonction somme de sa série de Taylor sur $]-\alpha, \alpha[$). Réciproque fausse.
- L'ensemble des fonctions développables en série entière au voisinage de 0 est stable par combinaison linéaire et par produit.
- Développements en série entière à connaître : exp, cos, sin, ch, sh sur $\mathbb{R}$; $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $x \mapsto -\ln(1-x)$, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \operatorname{Arctan}(x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$ sur $]-1, 1[$.