I. SÉRIES ENTIÈRES

Convergence :

- Lemme d'Abel.
- Définition du *rayon de convergence* de $\sum a_n z^n$ et du disque ouvert de convergence :
$$R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+^*,\ (a_n r^n) \text{ est bornée}\},\ R \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}.$$
Si $|z| < R$, la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge absolument ; si $|z| > R$, elle diverge grossièrement.
→ Application : si $\sum a_n x_0^n$ diverge, alors $R \leqslant |x_0|$; si $(a_n x_1^n)$ converge vers 0, alors $R \geqslant |x_1|$, etc.
→ *Utilisation de la règle de d'Alembert.* On peut employer $R = \frac{1}{\ell}$ pour $\sum a_n z^n$ si $a_n \neq 0$ pour tout n et si $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \ell$, mais on peut aussi choisir d'appliquer systématiquement la règle concernant les séries numériques (en étudiant $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ avec $u_n = a_n x^n$, ou $a_n x^{2n+1}$, ou.... selon la série étudiée).
Cas des séries entières lacunaires : on doit appliquer la règle de d'Alembert à la série numérique (sur le terme général, contenant la variable).
- Comparaison de rayons de convergence. Si $a_n = \mathcal{O}(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$. Si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R_a = R_b$.
- Pour toute suite complexe (a_n), les séries entières $\sum a_n z^n$, $\sum n a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{a_n z^n}{n}$ ont même rayon de convergence.
- *Opérations sur les séries entières* : Somme, combinaison linéaire, produit de Cauchy (le rayon de convergence de la somme ou du produit est supérieur ou égal au minimum des deux).

Régularité de la fonction somme :

- Sur tout segment inclus dans $]-R,R[$, la série entière réelle $\sum a_n x^n$, et ses séries dérivées, convergent normalement. La fonction somme est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ (et expression des dérivées successives). Lien entre a_n et $f^{(n)}(0)$.
- *Deux **méthodes** à connaître pour justifier, si c'est possible, la continuité en R et/ou en $-R$.*
(i) Lorsque $\sum a_n R^n$ converge absolument, la série entière converge normalement sur $[-R,R]$. Dans ce cas, f est continue sur $[-R,R]$.
(ii) Parfois on peut utiliser le TSSA pour obtenir la convergence uniforme sur $[0,R]$, ou sur $[-R,0]$ (caractérisation de la convergence uniforme avec les restes, résultat sur les restes donné par le TSSA).
Tout autre théorème radial est hors programme.
- Primitives de la fonction somme de $\sum a_n x^n$, obtenues par intégration terme à terme sur $]-R,R[$.

Fonction développable en série entière sur un intervalle $]-\alpha,\alpha[$:

- Si f est développable en série entière sur $]-\alpha,\alpha[$, alors elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\alpha,\alpha[$ et les coefficients a_n sont uniques : ce sont les $\frac{1}{n!}f^{(n)}(0)$ (donc f est égale à la fonction somme de sa série de Taylor sur $]-\alpha,\alpha[$). Réciproque fausse.
- L'ensemble des fonctions développables en série entière au voisinage de 0 est stable par combinaison linéaire et par produit.
- Développements en série entière à connaître : exp, cos, sin, ch, sh sur $\mathbb{R}$; $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $x \mapsto -\ln(1-x)$, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \mathrm{Arctan}(x)$ et $x \mapsto (1+x)^\alpha$ sur $]-1,1[$.

II. RÉVISIONS SUR LES ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS ET EUCLIDIENS.

- Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens, exemples à connaître (voir ci-dessous) ; identités remarquables ($\|x+y\|^2$ etc), identités de polarisation ; orthogonalité de vecteurs, de sev. Orthogonal d'un sev de E.
Les produits scalaires à connaître sont :
dans $\mathbb{R}^n$, identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(X \mid Y) = X^\top.Y = Y^\top.X = \sum\limits_{i=1}^n x_i y_i$;
dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(A \mid B) = tr(A^\top.B)$ (savoir justifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire) ;
dans $\mathbb{R}[X]$, ou $\mathbb{R}_n[X]$: produit scalaire canonique (coefficient par coefficient),
ou produit scalaire intégrale sur un segment.

dans $\mathcal{C}^0([a,b],\mathbb{R})$*, produit scalaire* $\langle f,g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\,dt$.

vu en début d'année : produit scalaire intégrale pour les fonctions de carré intégrable sur I

- Inégalité de Cauchy-Schwarz.
- Des sev deux à deux orthogonaux sont en somme directe. En dimension finie, dimension de $F^{\perp}$, supplémentaire orthogonal.
  Familles orthogonales, orthonormées. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Expression des coordonnées d'un vecteur dans une b.o.n., traduction sur le produit scalaire et la norme. Projecteurs orthogonaux, symétries orthogonales. Expression du projeté orthogonal sur F (F de dimension finie) en fonction d'une b.o.n. de F. Distance d'un vecteur ("un point") à un sev.