ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS ET ESPACES EUCLIDIENS.

I. Révisions

- Espaces préhilbertiens réels, espaces euclidiens, exemples à connaître (voir ci-dessous) ; identités remarquables ($\|x+y\|^2$ etc), identités de polarisation ; orthogonalité de vecteurs, de sev. Orthogonal d'un sev de E.
  Les produits scalaires à connaître sont :
  dans $\mathbb{R}^n$*, identifié à* $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $(X \mid Y) = X^\top.Y = Y^\top.X = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ *;*
  dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $(A \mid B) = tr(A^\top.B)$ *(savoir justifier qu'il s'agit bien d'un produit scalaire) ;*
  dans $\mathbb{R}[X]$*, ou* $\mathbb{R}_n[X]$ *:* | *produit scalaire canonique (coefficient par coefficient),*
  | *ou produit scalaire intégrale sur un segment.*
  vu en début d'année : produit scalaire intégrale pour les fonctions de carré intégrable sur I

- Inégalité de Cauchy-Schwarz ; des sev deux à deux orthogonaux sont en somme directe. En dimension finie, dimension de $F^\perp$, supplémentaire orthogonal.
  Familles orthogonales, orthonormées. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. Expression des coordonnées d'un vecteur dans une b.o.n., traduction sur le produit scalaire et la norme. Projecteurs orthogonaux, symétries orthogonales. Expression du projeté orthogonal sur F en fonction d'une b.o.n. de F. Distance d'un vecteur ("un point") à un sev.

II. Isométries vectorielles : E est un espace euclidien.

- Ce sont les endomorphismes de E qui conservent la norme, ou qui conservent le produit scalaire, ou qui transforment toute b.o.n. en une b.o.n.
- Toute isométrie vectorielle est un automorphisme de E, l'ensemble $\mathcal{O}(E)$ ("groupe orthogonal de E") est stable par composition et réciproque. Si $f \in \mathcal{O}(E)$ et F est un sev stable par f, alors $F^\perp$ est stable par f.
- Les symétries orthogonales, en particulier les réflexions (symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan), sont des isométries vectorielles.
  On peut préciser que : *parmi les symétries de E, les seules qui conservent la norme sont les symétries orthogonales.*

III. Matrices orthogonales :

- $A \in \mathcal{O}(n)$ (ou $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$) lorsque $A^\top.A = A.A^\top = I_n$; c'est équivalent à dire que la famille des colonnes de A (ou la famille des lignes) est une b.o.n. de $\mathbb{R}^n$ pour le produit scalaire usuel.
- Ce sont les matrices carrées de taille n associées <u>dans les b.o.n.</u> à des isométries vectorielles.
- L'ensemble $\mathcal{O}(n)$ ("groupe orthogonal d'ordre n") est stable par produit et inverse.
- $A \in \mathcal{O}(n) \Rightarrow \det(A) = \pm 1$, réciproque fausse.
  $\mathcal{SO}(n)$ est l'ensemble des matrices orthogonales de det 1 (stable par $\times$ et inverse).
- <u>Étude détaillée du groupe orthogonal en dimension 2</u> :
  $\mathcal{O}(2) = \{R(\theta), \theta \in \mathbb{R}\} \cup \{S(\theta), \theta \in \mathbb{R}\}$ avec $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ et $S(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.
  Les matrices $S(\theta)$ sont des matrices de réflexions dans un plan euclidien muni d'une b.o.n.
  Définition des rotations d'un plan euclidien : associées à une matrice $R(\theta)$ dans n'importe quelle b.o.n. directe.

IV. Endomorphismes autoadjoints et matrices symétriques réelles :

- Définition d'un endomorphisme autoadjoint (ou symétrique, le terme "autoadjoint" étant désormais favorisé dans le programme). *La notion d'adjoint en général n'est pas au programme.*
  Lien entre endomorphisme autoadjoint et matrice symétrique via une b.o.n. Leurs valeurs propres

sont réelles, l'orthogonal d'un sev stable est encore stable.

- Parmi les projecteurs (resp. les symétries), les projecteurs orthogonaux (resp. symétries orthogonales) sont les seul(e)s qui sont des endomorphismes autoadjoints.
- ***Théorème spectral*** : Tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien est diagonalisable dans une b.o.n. (on peut obtenir une b.o.n. de vecteurs propres).
  Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une b.o.n. (on peut obtenir une matrice de passage orthogonale).
  Les sev propres associés à des vp distinctes sont orthogonaux.
- Matrices symétriques positives et définies positives ; endomorphismes autoadjoints positifs, ou défini positifs.
  Définition : $u \in \mathcal{S}(E)$ est positif (resp. définie positive) si $\forall x \in E$, $(x \mid u(x)) \geqslant 0$ (resp. $\forall x \neq 0$, $(x \mid u(x)) > 0$). Pareil pour les matrices avec $X^\top AX$.
  Notation : $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}^+(E)$, $\mathcal{S}^{++}(E)$.
  Démonstration à connaître : A symétrique positive si et seulement si $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}^+$; A symétrique définie positive ssi $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+^*$. Analogue avec les endomorphismes.