ESPACES PRÉHILBERTIENS RÉELS ET ESPACES EUCLIDIENS.

Révisions de première année. Isométries, matrices orthogonales. Endomorphismes autoadjoints, théorème spectral, endomorphismes autoadjoints positifs ou définis positifs (matrices symétriques réelles positives ou définies positives).

ENSEMBLES DÉNOMBRABLES ET FAMILLES SOMMABLES

En introduction aux chapitres de Probabilités.

- Ensemble dénombrable : seulement la définition. Ensemble au plus dénombrable.
- *Famille sommable d'éléments de* $[0, +\infty]$.
  Pour une **famille de réels positifs** indexée par un ensemble dénombrable : si le calcul ne fait pas apparaître de série divergente, on dit que la famille est sommable et sa somme est calculée. Si le calcul fait apparaître une série divergente, la famille n'est pas sommable et sa somme vaut $+\infty$. (En particulier si l'un des termes de la famille est $+\infty$...)
  Extrait du programme : En pratique, dans le cas positif, les étudiants peuvent découper, calculer et majorer leurs sommes directement, la finitude de la somme valant preuve de sommabilité.
  Le calcul effectué peut donc utiliser un découpage (paquets), un échange de sommes (Fubini) : pas de justification dans le cas réel positif d'après ce qui précède.
- *Familles dénombrables quelconques* : si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille dénombrable de complexes, on dit qu'elle est sommable si la famille de réels positifs $(|x_i|)_{i\in I}$ est sommable.
- $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable ssi la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} x_n$ converge absolument. Si $|x_i| \leqslant a_i$ pour tout i et si (a_i) est sommable, alors (x_i) est sommable.
- *Sommation par paquets* : Si $(x_i)_{i\in I}$ est sommable, pour tout découpage $I = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} I_n$ (union disjointe), on a $\sum\limits_{i\in I} x_i = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left(\sum\limits_{i\in I_n} x_i \right)$.
- *Théorème de Fubini* : échange des sommes dans le cas d'une famille sommable indexée par des couples $(i,j) \in I \times J$ où I et J sont dénombrables.