

## 1. TOUTES LES PROBABILITÉS

Avec notamment espérance, variance, covariance, fonction génératrice, qui n'étaient pas au programme de colle il y a deux semaines.

- Tribu, probabilité,  $\sigma$ -additivité. Continuité croissante ou décroissante.
- Probabilités conditionnelles, formules des probabilités, des probabilités totales, de Bayes.
- Variables aléatoires, couples de variables aléatoires. Calculs de probabilités de la forme  $\mathbf{P}(X \geq n)$ ,  $\mathbf{P}(X = Y)$  ou  $\mathbf{P}(X + Y = k)$ .
- Indépendance d'événements, indépendance de variables aléatoires. Lemme des coalitions.
- Lois usuelles : Bernoulli, binomiale, uniforme sur  $\{1, \dots, N\}$  ou sur un ensemble fini quelconque, géométrique, Poisson.

## Espérance d'une variable discrète

- Pour une variable discrète à valeurs dans  $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ ,  $E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) \in \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$  (convention  $xP(X = x) = 0$  lorsque  $x = +\infty$  et  $P(X = x) = 0$ ).
- Pour une v.a.d. réelle ou complexe,  $X$  est **d'espérance finie** si la famille  $(xP(X = x))$  est sommable, dans ce cas  $E(X)$  est sa somme. Exemples, contre-exemples. Variable centrée.
- **Formule de transfert** :  $\varphi(X)$  est d'espérance finie si et seulement si la famille  $(\varphi(x)P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$  est sommable. Dans ce cas,  $E(\varphi(X))$  est sa somme.
- **Formule de transfert pour un couple** : énoncé analogue, avec la loi conjointe du couple. Si  $X$  et  $Y$  sont indépendantes alors  $E(XY) = E(X)E(Y)$ .
- Propriétés et méthodes de calcul : linéarité, positivité, croissance. Si  $|X| \leq Y$  et si  $Y$  est d'espérance finie, alors  $X$  est d'espérance finie. En particulier, si  $X$  est bornée, alors elle est d'espérance finie.
- Espérances des variables usuelles (uniforme sur  $\llbracket 1, N \rrbracket$ , Bernoulli, binomiale, géométrique et Poisson) à connaître par cœur.

## Variance

- **Inégalité de Cauchy-Schwarz** : Si  $X, Y$  sont à valeurs réelles, et si  $X^2$  et  $Y^2$  sont d'espérances finies, alors  $XY$  est d'espérance finie et  $(E(XY))^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$ . (Cas d'égalité).
- Si  $X^2$  est d'espérance finie, alors  $X$  est d'espérance finie. Variance :  $V(X) = E[X - E(X)]^2$  (définition). **Formule de Koenig-Huygens** :  $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$ . Écart-type.
- *Formulaire* :  $V(aX + b) = a^2V(X)$ . Si  $V(X) > 0$ , alors  $\frac{1}{\sigma(X)}(X - E(X))$  est une variable centrée réduite.

## Covariance

- $\text{cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] = E(XY) - E(X)E(Y)$ , définie lorsque  $X^2$  et  $Y^2$  sont d'espérances finies. Coefficient de corrélation.
- *Formulaire* :  $\text{cov}(X, X) = V(X)$ ,  $\text{cov}(Y, X) = \text{cov}(X, Y)$ ,  
 $\text{cov}(aX + bY, Z) = a\text{cov}(X, Z) + b\text{cov}(Y, Z)$  (et plus généralement, bilinéarité)  
 $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2\text{cov}(X, Y)$ ,  $V(X - Y) = \dots$   
 $V(X_1 + \dots + X_n) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j)$  (dans la somme double, il y a  $\binom{n}{2}$  termes!)
- Inégalité de Cauchy-Schwarz (2) :  $|\text{cov}(X, Y)| \leq \sigma(X) \cdot \sigma(Y)$  donc  $|\rho(X, Y)| \leq 1$ .
- Si  $X \perp\!\!\!\perp Y$ , avec  $X^2$  et  $Y^2$  d'espérances finies, alors :  $E(XY) = E(X)E(Y)$ , donc  $\text{cov}(X, Y) = 0$ , ou encore  $V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$ . Réciproques fausses.
- Pour  $X_1, \dots, X_n$  2 à 2 indépendantes,  $V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n)$ .

Fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans  $\mathbb{N}$  :

- *Définition* : Si  $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ ,  $G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n$ , là où c'est défini.

- Le rayon de convergence de  $\sum_{n \geq 0} P(X = n)t^n$  est supérieur ou égal à 1 ;  $G_X(1) = 1$ .
- $G_X$  est continue au moins sur  $[-1, 1]$  (la série de fonctions CVN sur  $[-R_X, R_X]$ ), et de classe  $\mathcal{C}^\infty$  au moins sur  $] -1, 1[$ . Si  $R_X > 1$ ,  $G_X$  est bien sûr  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $] -R_X, R_X[ \supset ] -1, 1[$ .
- Deux v.a.r. à valeurs dans  $\mathbb{N}$  ont la même fonction génératrice si et seulement si elles ont même loi.
- $X$  est d'espérance finie si et seulement si  $G_X$  est dérivable en 1 et, dans ce cas,  $E(X) = G'_X(1)$ .  
 $X$  admet une variance ssi  $G_X$  est deux fois dérivable en 1. Dans ce cas,  $G''_X(1) = E(X(X-1))$  et on en déduit la variance.  
 → Espérance et variance des lois binomiale, géométrique et de Poisson. Leurs fonctions génératrices se retrouvent rapidement (pas à connaître par coeur).
- Si  $X$  et  $Y$  sont à valeurs dans  $\mathbb{N}$  et indépendantes, alors :  $G_{X+Y} = G_X \cdot G_Y$ . Applications (somme de lois de Poissons indépendantes, somme de lois binomiales indépendantes).

### Inégalités probabilistes :

- **Inégalités de Markov :**  
 Si  $X$  est positive et d'espérance finie, alors pour tout  $t > 0$ ,  $P(X \geq t) \leq \frac{E(X)}{t}$ .  
 Si  $X$  est de signe qcq et d'espérance finie,  $P(|X| \geq t) \leq \frac{E(|X|)}{t}$ .  
 Si  $X^2$  est d'espérance finie,  $P(|X| \geq t) \leq \frac{E(X^2)}{t^2}$ .
- **Inégalité de Bienaymé-Tchebychev :** si  $X^2$  est d'espérance finie,  $\forall \varepsilon > 0$ .  

$$P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{V(X)}{\varepsilon^2}.$$
- **Loi faible des grands nombres :** Avec  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite i.i.d de variables aléatoires de variance finie,  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ ,  $m = E(X_1)$  et  $\sigma = \sigma(X_1)$ . Pour tout  $\varepsilon > 0$  :  $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .  
 Les étudiants doivent savoir retrouver  $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$ .

## 2. ESPACES VECTORIELS NORMÉS (Topologie)

**Révisions :** Normes, normes usuelles sur  $\mathbb{K}^n$ ,  $\mathbb{K}[X]$ ,  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  et les espaces de fonctions, normes équivalentes. On a admis que deux normes d'un espace vectoriel de dimension finie sont toujours équivalentes. Suites vectorielles, limite, opérations.

### Topologie dans les espaces vectoriels normés

- Définitions : point intérieur à une partie, partie ouverte, partie fermée (son complémentaire est une partie ouverte), point adhérent à une partie, adhérence. *Bizarrement, les termes et notations correspondant à "frontière" et "intérieur de A" ne sont plus cités dans le programme.*
- Partie dense dans  $(E, \|\cdot\|)$ .
- **Caractérisations séquentielles** des points adhérents et des parties fermées.
- Invariance de ces notions par passage à une norme équivalente.
- Ouverts, fermés et réunions, intersections (finies, quelconques).