En raison du cafouillage de programme de colle 17, je remets la fin des probas dans ce programme de colle. Il s'agit particulièrement de :

- Variance, écart-type, covariance. Calculs, formulaire (variance d'une somme...)
- Fonction génératrice d'une variable à valeurs dans $\mathbb{N}$, application pour l'espérance et la variance, ou pour la loi de la variable.
- Inégalités de Markov et Bienayme-Tchebychev, loi faible des grands nombres.

En lien avec la suite du programme de colle ci-dessous, on pourra poser des exercices sur les fonctions d'une variable réelle (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) pour réviser le programme de première année, notamment les théorèmes : valeurs intermédiaires, bornes atteintes, bijection, Rolle, accroissements finis, limite de la dérivée...

Topologie dans les espaces vectoriels normés

- Définitions : point intérieur à une partie, partie ouverte, partie fermée (son complémentaire est une partie ouverte), point adhérent à une partie, adhérence. *Bizarrement, les termes et notations correspondant à "frontière" et "intérieur de A" ne sont plus cités dans le programme.*
- Partie dense dans $(E, \|\cdot\|)$.
- ***Caractérisations séquentielles*** des points adhérents et des parties fermées.
- Invariance de ces notions par passage à une norme équivalente.
- Ouverts, fermés et réunions, intersections (finies, quelconques).

Fonctions : limites et continuité

- Limite de $f \in \mathcal{F}(A, F)$ ($A \subset E$) en un point adhérent à A, définition. Cas des limites infinies lorsque $F = \mathbb{R}$, cas des limites en $\pm\infty$ lorsque $A \subset \mathbb{R}$. Continuité en un point de A.
- Invariance par passage à une (des) normes équivalentes dans E et/ou F.
- Opérations sur les limites.
- Continuité en un point, sur une partie. Opérations. Fonctions lipschitziennes et continuité, la norme est 1-lipschitzienne. Les fonctions $(x_1, ..., x_n) \mapsto x_i$ sont continues sur $\mathbb{K}^n$, puis les fonctions polynomiales en n variables, et les fonctions rationnelles sur leur ensemble de définition.
- ***Caractérisation séquentielle*** de la limite ou de la continuité. Exemples de fonctions sur $\mathbb{R}^2$ non continues en $(0, 0)$.
- Image réciproque d'un ouvert (fermé) par une fonction continue. Cas des ensembles de la forme $\{x \in E, f(x) > 0\}$ (resp. $f(x) \geqslant 0$) ou f est continue de E vers $\mathbb{R}$. Exemples (matrices diagonales etc., la fermeture des sev en dimension finie n'est pas un théorème au programme).

EVN de dimension finie

- Toutes les normes sont équivalentes.
- Pour chercher la limite d'une suite de vecteurs, on peut passer par les suites coordonnées dans une base (coefficient par coefficient pour les suites de matrices ou les suites de $\mathbb{K}^n$). Pour chercher la limite d'une fonction vectorielle ou étudier la continuité, on peut passer par les fonctions coordonnées dans une base.
- Lorsque l'espace de départ est $\mathbb{R}^n$, la continuité de f en un point implique la continuité des applications partielles mais la réciproque est fausse.
- *Théorème des bornes atteintes* (admis) : Si f est une fonction **continue** sur une **partie A fermée bornée** de E de **dim finie** et à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors f est bornée et atteint ses bornes (f admet un maximum global et un minimum global sur A).
- Continuité des applications linéaires (elles sont même lipschitziennes), bilinéaires.
  La norme d'opérateur n'est pas au programme de PC.

Fonctions d'une variable réelle et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$: dérivation

- Dérivabilité en un point $a \in I$, dérivabilité à droite, à gauche ; $f'(a)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, on peut le calculer en dérivant coordonnée par coordonnée. Équivalence entre la dérivabilité en a et l'existence d'un DL_1 en a.

- Dérivabilité sur un intervalle. Caractérisation des fonctions constantes.
- Opérations sur les fonctions dérivables : combinaison linéaire, composition à droite par une fonction réelle ($(f \circ \varphi)' = \varphi'.(f' \circ \varphi)$).
  Composition à gauche par une application linéaire ($(L \circ f)' = L \circ f'$), par une application bilinéaire ($[B(f,g)]' = B(f',g) + B(f,g')$), par une application multilinéaire.
  Dérivation du produit scalaire de deux fonctions dérivables, du déterminant de n fonctions dérivables.
- Dérivées successives, fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^p$, $\mathcal{C}^\infty$. Opérations : combinaison linéaire, composition à gauche par une application linéaire ou bilinéaire.
  Formule de Leibniz pour la dérivée n-ème de $B(f,g)$ avec B bilinéaire.
  Si $f \in \mathcal{C}^p(I, \mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^p(J, I)$ (intervalles réels), alors $(f \circ \varphi) \in \mathcal{C}^p(J, \mathbb{R}^n)$. Pas de formule pour la dérivée p-ème de cette composée.