En lien avec le programme de colle ci-dessous, on pourra poser des exercices sur les fonctions d'une variable réelle (à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) pour réviser le programme de première année, notamment les théorèmes : valeurs intermédiaires, bornes atteintes, bijection, Rolle, accroissements finis, limite de la dérivée...

Révisions : EVN, topologie (parties ouvertes, fermées), limites des fonctions, continuité. Cas particuliers en dimension finie. *La compacité et les normes d'opérateurs ne sont toujours pas au programme de PC...*

Fonctions d'une variable réelle et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$: dérivation

- Dérivabilité en un point $a \in I$, dérivabilité à droite, à gauche ; $f'(a)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^n$, on peut le calculer en dérivant coordonnée par coordonnée. Équivalence entre la dérivabilité en a et l'existence d'un DL_1 en a.
- Dérivabilité sur un intervalle. Caractérisation des fonctions constantes.
- Opérations sur les fonctions dérivables : combinaison linéaire, composition à droite par une fonction réelle ($(f \circ \varphi)' = \varphi'.(f' \circ \varphi)$).
  Composition à gauche par une application linéaire ($(L \circ f)' = L \circ f'$), par une application bilinéaire ($[B(f,g)]' = B(f',g) + B(f,g')$), par une application multilinéaire.
  Dérivation du produit scalaire de deux fonctions dérivables, du déterminant de n fonctions dérivables.
- Dérivées successives, fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^p$, $\mathcal{C}^\infty$. Opérations : combinaison linéaire, composition à gauche par une application linéaire ou bilinéaire.
  Formule de Leibniz pour la dérivée n-ème de $B(f,g)$ avec B bilinéaire.
  Si $f \in \mathcal{C}^p(I,\mathbb{R}^n)$ et $\varphi \in \mathcal{C}^p(J,I)$ (intervalles réels), alors $(f \circ \varphi) \in \mathcal{C}^p(J,\mathbb{R}^n)$. Pas de formule pour la dérivée p-ème de cette composée.

Fonctions de plusieurs variables, calcul différentiel.

Notions détaillées pour des fonctions définies sur *un ouvert U de $\mathbb{R}^p$* et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

- Si f est définie sur U, $a \in U$ et $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^p$, $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$, *dérivée en a suivant le vecteur $\overrightarrow{u}$*.
  $$D_{\overrightarrow{u}} f(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+t\overrightarrow{u}) - f(a)}{t} = \varphi'_{\overrightarrow{u}}(0) \quad \text{où} \quad \varphi_{\overrightarrow{u}} : t \mapsto f(a + t\overrightarrow{u})$$
  si cette limite existe (limite réelle finie).
- Applications partielles en a, dérivées partielles en a (si elles existent). Une fonction est *de classe $\mathcal{C}^1$ sur U* si ses dérivées partielles sont définies en tout point de U et si les fonctions dérivées partielles sont continues sur U.
  Notations : $\partial_i f(a) = \frac{\partial_i f}{\partial x_i}(a)$, ce sont des réels. Les fonctions $\partial_i f$ vont de U vers $\mathbb{R}$ (si elles sont bien définies).
- *Gradient* de f en a, noté $\nabla f(a)$ (c'est un vecteur de $\mathbb{R}^p$) ; *différentielle* de f en a (c'est une application linéaire de $\mathbb{R}^p$ vers $\mathbb{R}$).
  $$\mathrm{d}f(a) : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}, \;\; h \in \mathbb{R}^p \mapsto \mathrm{d}f(a) \cdot h = \mathrm{d}_a f(h) = \langle \nabla f(a) \mid h \rangle = \sum_{i=1}^{p} h_i \partial_i f(a)$$
- *Développement limité à l'ordre 1 en $a \in U$* pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur U :
  $$f(a+h) = f(a) + \langle \nabla f(a) \mid h \rangle + o(\|h\|) = f(a) + \mathrm{d}f(a) \cdot h + \|h\| \varepsilon(h) \text{ où } \lim_{\|h\| \to 0} \varepsilon(h) = 0$$
- Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est continue sur U. En revanche la seule existence de dérivées partielles ne suffit pas pour avoir la continuité de f (exemples et contre-exemples).

- Opérations et dérivées partielles : combinaison linéaire, produit...
- **Règle de la chaîne** : si $X \in \mathcal{C}^1(I,U)$ (I intervalle réel) et $f \in \mathcal{C}^1(U,\mathbb{R})$, alors $g = f \circ X \in \mathcal{C}^1(I,\mathbb{R})$
  $$\text{et} \quad \forall t \in I, \;\; g'(t) \langle \nabla f(X(t)) \mid X'(t) \rangle = \mathrm{d}f(X(t)) \cdot X'(t) = \sum_{i=1}^{p} x_i'(t) \partial_i f(x_1(t), ..., x_p(t)).$$
- Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert <u>convexe</u> (la connexité n'étant pas au programme de PC).
- *Changements de variables* : fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de U vers $\mathbb{R}^p$. Exemples en dimension 2 (changement de variables affine, passage en polaires). Utilisation d'un changement de variables pour arranger une

équation aux dérivées partielles, le changement de variables doit être donné.

- Dérivées partielles d'ordre 2 : $\partial^2_{i,j} f(a) = \frac{\partial}{\partial x_i}(\frac{\partial f}{\partial x_j})(a)$. Fonction de classe $\mathcal{C}^2$, théorème de Schwarz (admis). Pas de détails, les d.p. d'ordre 2 sont surtout un outil pour les extremums.
- Matrice hessienne de f en a ($H_f(a)$), c'est une matrice symétrique de taille p (et réelle). Développement limité à l'ordre 2 pour $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$:
$f(a+h) = f(a) + \mathrm{d}f(a) \cdot h + \frac{1}{2} h^\top H_f(a) h + o(\|h\|^2) = f(a) + \langle \nabla f(a) \mid h \rangle + \frac{1}{2} \sum\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant p} h_i h_j \partial^2_{i,j} f(a) + o(\|h\|^2)$.
- Extremum global, local, local strict : définitions, notion de point-col. *Si f admet un extremum local en $a \in U$, alors $\nabla f(a) = 0_{\mathbb{R}_p}$* (la notion d'ouvert est cruciale ici).
- Soit $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ et soit a un point critique de f :
  i. Si $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$, i.e. $\mathrm{Sp}(H_f(a)) \subset \mathbb{R}_+^*$ (resp $-H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$, i.e. $\mathrm{Sp}(H_f(a)) \subset \mathbb{R}_-^*$), alors f admet un minimum local strict en a (resp maximum local strict).
  ii. Si $H_f(a)$ admet deux valeurs propres non nulles de signe contraire, alors il y a un point-col en a (f n'a pas d'extremum local en a).
  iii. Sinon ($0 \in \mathrm{Sp}(H_f(a))$ et toutes les autres vp sont de même signe), on ne peut pas conclure.
- Lorsque f est une fonction de deux variables, le signe du déterminant de $H_f(a)$ indique si on est dans le cas i., ou ii., ou iii.
Si $\det(H_f(a)) > 0$, le signe de la trace permet de préciser s'il s'agit d'un minimum (det et tr > 0) ou d'un maximum (det > 0 et tr < 0) local strict.
Le programme de PC ne parle pas des notations de Monge.
- Si on cherche les extremums globaux sur un fermé borné C (théorème des bornes atteintes), on distingue l'étude sur l'intérieur de C (points critiques et hessienne) et l'étude sur la frontière.