

Révisions et compléments sur les fonctions réelles et les intégrales sur un segment .

- Fonctions usuelles, développements limités, primitives usuelles. Théorème de la limite monotone, théorèmes des valeurs intermédiaires, de Rolle, des accroissements finis, de la bijection, de la limite de la dérivée...
- Fonctions continues par morceaux sur un segment, intégration sur un segment, propriétés de l'intégrale des fonctions cpm sur un segment : linéarité, positivité, inégalités triangulaire et de Cauchy-Schwarz. Stricte positivité de l'intégrale d'une fonction **continue**, positive et non identiquement nulle.
- **Théorème fondamental de l'Analyse** (pour les fonctions continues).
- **Formule de Taylor avec reste intégral**.

Intégrales généralisées.

- Définition de la convergence (ou divergence) d'une intégrale de fonction continue par morceaux sur un intervalle I quelconque.
- Si f est positive sur $I = [a, b[$ (resp. $]a, b]$), alors $\int_a^b f(t)dt$ converge ssi $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est majorée (resp. $x \mapsto \int_x^b f(t)dt$ est majorée) car cette fonction est croissante sur I (resp. décroissante).
- Intégrale *absolument convergente*. La convergence absolue entraîne la convergence. La réciproque est fausse ; l'intégrale de Dirichlet $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ a été citée comme cas d'intégrale semi-convergente, mais l'étude détaillée d'intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.
- Une fonction f continue par morceaux sur I est intégrable sur I lorsque l'intégrale de f sur I est absolument convergente.

— Fonctions intégrables de référence, intégrales de référence :

(a) $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$ intégrable en $+\infty$, donc sur un intervalle comme $[1, +\infty[$, ssi $\alpha > 1$.

Elle est intégrable en 0 (sur $]0, 1]$) ssi $\alpha < 1$.

(b) $x \mapsto e^{-\lambda x}$ en $+\infty$ ssi $\lambda > 0$, valeur de l'intégrale sur $\mathbb{R}^+$ à connaître (sans refaire un calcul à chaque fois)

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda} \text{ si } \lambda > 0.$$

(c) $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0, 1]$; $x \mapsto \frac{1}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$.

(d) Une fonction continue sur $]a, b]$ (a borne finie) et prolongeable par continuité en a est intégrable sur $]a, b]$. Analogie pour $[a, b[$ avec b fini.

— Théorème de comparaison pour étudier l'intégrabilité :

(i) Si f et g sont continues par morceaux sur I , avec $|f| \leq |g|$ sur I , alors :

$(g \text{ intégrable sur } I) \Rightarrow (f \text{ intégrable sur } I)$ (donc f non intégrable $\Rightarrow g$ non intégrable).

(ii) Si f et g sont continues par morceaux sur $I = [a, b[$ et si $f = \mathcal{O}(g)$ ou $f = o(g)$ en b , alors

$(g \text{ intégrable sur } I) \Rightarrow (f \text{ intégrable sur } I)$ (donc f non intégrable $\Rightarrow g$ non intégrable).

(Analogie pour $I =]a, b]$).

(iii) Si f et g sont cpm sur $I = [a, b[$ et si $f \sim g$ en b , alors f intégrable $\Leftrightarrow g$ intégrable.

(Analogie pour $I =]a, b]$).

Rédaction : On précise avant toute chose que la fonction est continue par morceaux (souvent continue tout court) sur I pour indiquer la ou les bornes ouvertes.

Avec un théorème de comparaison, on montre ensuite que la fonction est "intégrable en a ", ou non intégrable en a , lorsque $I =]a, b]$ (intégrable ou non intégrable "en b " lorsque $I = [a, b]$).

Pour en déduire la nature de l'intégrale généralisée : convergence absolue si la fonction est intégrable ; et on peut dire que l'intégrale est divergente lorsque la fonction n'est pas intégrable et réelle de signe constant.

Exemples classiques à savoir traiter :

(a) Intégrabilité sur $\mathbb{R}$ des fonctions du type $t \mapsto e^{-\alpha t^2}$ avec $\alpha > 0$. Les valeurs des intégrales de Gauss habituelles (avec e^{-t^2} ou $e^{-t^2/2}$ sur $\mathbb{R}$) ont été données. Il faut savoir passer de l'une aux autres par changement de variable et parité (pour l'intégrale sur $\mathbb{R}^+$).

(b) Intégrabilité ou non, en 0 et en $+\infty$, des fonctions de Bertrand $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha |\ln t|^\beta}$ avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ selon α et β ; intégrabilité en 1 (lorsque $\beta > 0$).

Le résultat général n'est pas à connaître, et ne peut pas être utilisé directement. Toute fonction de ce type est à traiter comme un exercice, l'intégrabilité ou non intégrabilité doit être justifiée.

(c) Intégrabilité sur $\mathbb{R}^+$ des fonctions de la forme $t \mapsto \cos(\beta t)e^{-\alpha t}$ et $t \mapsto \sin(\beta t)e^{-\alpha t}$ lorsque $\alpha > 0$. Savoir calculer les valeurs des intégrales sur $\mathbb{R}^+$, en passant par $t \mapsto e^{(i\beta - \alpha)t}$ ou avec des I.P.P.

— Linéarité de l'intégrale, positivité. **Stricte positivité pour les fonctions continues.**

— Intégration par parties. *L'intégration par parties s'écrit directement sur l'intervalle quelconque et on vérifie que "le crochet converge"; dans ce cas les deux intégrales généralisées sont de même nature.*

Application : Calcul d'intégrales en $\cos \times \exp$ ou $\sin \times \exp$ (cf exemples classiques (c)).

Convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$. Il faut connaître $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ comme exemple de fonction non intégrable sur $]0, +\infty[$ (dont l'intégrale est semi-convergente), mais la justification de la non intégrabilité n'est pas exigible.

— Changement de variable. Application au cas des fonctions paires ou impaires (dont l'intégrale converge !) sur $] -a, a[$.

Lorsque a ou b sont des bornes finies : $t \mapsto \frac{1}{(t-a)^\alpha}$ est intégrable en a ssi $\alpha < 1$. Pareil pour $t \mapsto \frac{1}{(b-t)^\alpha}$ en b .

Le changement de variable s'écrit directement sur l'intervalle quelconque et conserve la nature des intégrales généralisées. Pour les cas usuels et simples, on ne demande pas d'écrire que la fonction changement de variable est de classe $\mathcal{C}^1$ et bijective, mais il convient de vérifier au brouillon qu'on a bien quelque chose de bijectif! (Attention aux changements de bornes).

— Espace vectoriel des fonctions intégrables sur I . L'ensemble des fonctions de carré intégrable n'est plus cité dans le programme...

— Comparaison série-intégrale (révision).