RÉDUCTION.

1. Éléments propres

- Pour un endomorphisme en dim finie ou infinie, pour une matrice carrée : valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre, spectre.
- **Endomorphisme diagonalisable** en dimension finie (peut être représenté par une matrice diagonale), **matrice diagonalisable** (semblable à une matrice diagonale).
  f diagonalisable ssi il existe une base de E formée de vecteurs propres. C'est dans une base de ce type que l'on peut obtenir une matrice diagonale associée à f.
- *Cas particulier à connaître* : $\boxed{(f \text{ admet une seule vp et } f \text{ diagonalisable}) \Leftrightarrow f \text{ homothétie}}$.
  Donc si f admet une seule valeur propre λ et n'est pas égal à $\lambda \mathrm{Id}_E$, c'est que f n'est pas diagonalisable. Analogue pour les matrices.
- Exemples à connaître : projecteurs, symétries. Spectre et sev propres, ils sont diagonalisables lorsqu'on est en dimension finie.

2. Propriétés

- 0 est valeur propre de f si et seulement si f est non injectif (non bijectif en dim finie)
- Lien entre valeurs propres de f et de f^{-1} (si f bijectif), ou de $af + bId_E$ (avec $a \neq 0$), ou de f^k ($k \in \mathbb{N}$), ou de $P(f)$ ($P \in \mathbb{K}[X]$). Comparaison des sous-espaces propres dans ces deux cas.
- Si P est un polynôme annulateur de f, alors toute valeur propre de f est racine de P : $\boxed{\mathrm{Sp}(f) \subset \mathrm{Rac}(P)}$.
- $x \neq 0$ est un vecteur propre de f ssi $\mathrm{Vect}(x)$ est stable par f.
- Si $g \circ f = f \circ g$, tout sous-espace propre de l'un est stable par l'autre. En particulier tout sev propre de f est stable par f, l'endomorphisme de $E_\lambda(f)$ induit par f est $\lambda\ \mathrm{Id}_{E_\lambda}$.

- p vecteurs propres associés à p valeurs propres distinctes forment une famille libre.
  p sous-espaces propres associés à p valeurs propres distinctes sont en somme directe.
  Le lemme de décomposition des noyaux est hors programme.

3. Polynôme caractéristique

En dimension n : $\chi_f = \det(X\mathrm{Id}_E - f)$ est de degré n, unitaire (coefficient dominant 1), de coefficient constant $(-1)^n \det(f)$. Le coefficient de X^{n-1} est $-\mathrm{tr}(f)$. Analogue pour une matrice.

- Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique. Multiplicité.
- Pour $M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$, avec $A \in \mathcal{M}_p(K)$ et $C \in \mathcal{M}_{n-p}(K)$, $\chi_M = \chi_A \times \chi_C$.
- Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, d'ordre de multiplicité m_λ, alors $1 \leqslant \dim(\ker(f - \lambda\mathrm{Id}_E)) \leqslant m_\lambda$.
- Lorsque χ_f est scindé, $\mathrm{tr}(f) = \sum_{\lambda \in sp(f)} m_\lambda.\lambda$ et $\det(f) = \prod_{\lambda \in Sp(f)} \lambda^{m_\lambda}$.

4. Endomorphismes et matrices diagonalisables

Conditions nécessaires et suffisantes

$$\begin{aligned} f \in L(E) \text{ diagonalisable} &\Leftrightarrow E = \bigoplus_{\lambda \in Sp(f)} \ker(f - \lambda\mathrm{Id}_E) \\ &\Leftrightarrow \dim(E) = \sum_{\lambda \in sp(f)} \dim(\ker(f - \lambda\mathrm{Id}_E)) \\ &\Leftrightarrow \chi_f \text{ scindé et pour tout } \lambda \in Sp(f),\ \dim(\ker(f - \lambda\mathrm{Id}_E)) = m_\lambda \\ &\quad \text{(dim du sev propre = ordre de multiplicité).} \end{aligned}$$

Condition suffisante

Si f admet n valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable. Réciproque fausse.

Théorème spectral (1ère version) : Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.
Admis pour l'instant. Pas de notion de matrice de passage orthogonale, ni d'endomorphisme symétrique pour l'instant.

5. Polynômes annulateurs

- Nouvelle CNS de digonalisabilité : Un endomorphisme en dimension finie (ou une matrice) est diagonalisable si et seulement si il existe un **polynôme annulateur** de cet endomorphisme (ou cette matrice) **scindé à racines simples**. Démo non exigible pour le sens $\boxed{\Leftarrow}$.
  Il faut savoir que si f est diagonalisable, alors il annule le polynôme (scindé à racines simples) $\prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} (X - \lambda)$.
  Le polynôme minimal n'est pas au programme.

- Théorème de Cayley-Hamilton, démonstration non exigible. Application : si A admet 0 comme seule vp (réelles et complexes), alors $A^n = 0$ (nilpotente).

6. Trigonalisation

- A est trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire. Si on obtient une matrice triangulaire supérieure dans $\mathcal{B}$, on a une matrice triangulaire inférieure dans $\mathcal{B}'$ obtenue en inversant l'ordre des vecteurs.
- f est trigonalisable s'il peut être représenté par une matrice triangulaire supérieure dans une certaine base. C'est le cas si et seulement si n'importe quelle matrice associée à f est trigonalisable.
- A ou f est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé (démo non exigible pour le sens $\boxed{\Leftarrow}$). Donc toute matrice carrée est trigonalisable dans $\mathbb{C}$.
  En dimension supérieure ou égale à 4, tout exercice portant sur la trigonalisation doit contenir des indications. Les notions de sous-espaces caractéristiques, de réduction de Jordan (ou tout autre méthode générale) sont hors-programme.

7. Applications classiques de la diagonalisation

- Matrices semblables ou non. Recherche des puissances ou de l'inverse d'une matrice diagonalisable....
- Systèmes différentiels linéaires à coefficients constants (et homogènes). Systèmes linéaires de suites récurrentes. Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 ou plus.