1 Généralités, dérivation

$\star$ **Exercice 1** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, dérivable. Montrer que si f' a un extremum local en $x_0 \in I$, alors la courbe représentative de f traverse sa tangente en x_0.

$\heartsuit\star\star$ **Exercice 2** Soit P un polynôme de degré n à coefficients réels qui possède n racines réelles distinctes. Montrer que P' possède $n-1$ racines réelles distinctes.

$\heartsuit\star\star\star$ **Exercice 3**

1. Soit $a < b$ et f une fonction p fois dérivable sur $]a, b[$ qui admet $p+1$ zéros distincts dans $]a, b[$.
   Montrer que $\exists x \in]a, b[,\ f^{(p)}(x) = 0$.
2. Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$.
   Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ admet au plus un nombre fini de solutions sur $\mathbb{R}$.
   On précisera le nombre maximal de solutions en fonction du degré de P.

$\heartsuit\star$ **Exercice 4** Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que $f(0) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
Le but de l'exercice est de montrer que : $\exists x \in \mathbb{R}^+$ tel que : $f'(x) = 0$.
On pose : $g(x) = f(\tan(x))$ pour $x \in [0, \pi/2[$ et $g(\Pi/2) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(0)$.
Vérifier que g est continue sur $[0, \pi/2]$ et dérivable sur $]0, \pi/2[$, puis conclure.
Peut-on généraliser ce résultat ?

$\star\star$ **Exercice 5** Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f \circ f)(x) \ = \ \frac{x}{2} + 3.$$

a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(\frac{x}{2} + 3) \ = \ \frac{f(x)}{2} + 3$.
b) En déduire que f' est constante puis déterminer f.

$\heartsuit\star$ **Exercice 6** Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{e^{u_n}}{u_n+2}$.
a) Soit $f : x \to \frac{e^x}{x+2}$. Calculer f', f''. Construire le tableau de variation de f et préciser $f([0, 1])$.
b) Justifier : $\forall x \in [0; 1]\quad \frac{1}{4} \le f'(x) \le \frac{2}{3}$.
c) Etablir que l'équation $f(x) = x$ admet, sur $[0, 1]$, une unique solution notée α.
d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \le u_n \le 1$. En déduire que si (u_n) converge, alors sa limite est α.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \alpha| \le \frac{2}{3}|u_n - \alpha|$, en déduire $|u_n - \alpha| \le (\frac{2}{3})^n$. Conclure.
e) Donner une valeur de n telle que u_n soit une valeur approchée de α à 10^{-4} près.

2 Dérivées n-ièmes

$\heartsuit\star$ **Exercice 7** Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la dérivé n-ième des fonctions suivantes :

1. Soit $k \in \mathbb{Z}$. $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^k$
2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto (x^3 + x^2 + 1)e^{-x}$ Penser à la formule de Leibniz
3. $f :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{2x+3}{(x-1)(x+1)}$
4. $f :]1, 2[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$ *Ecrire $f(x)$ sous la forme $\frac{a}{(x-1)} + \frac{b}{x-2}$.*
5. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sin(3x)\cos(2x)$

$\heartsuit\star\star$ **Exercice 8**

1. Montrer que la fonction $f = \text{Arctan}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(x^2+1)^n}$ où P_n est une fonction polynomiale. On précisera une relation liant P_n et P_{n+1}.
   Facultatif : on précisera le degré et le coefficient dominant de P_n. dont on précisera le degré.
2. Montrer que $(1 + x^2)f''(x) + 2xf'(x) = 0$ et en déduire une relation liant P_{n-1}, P_n et P_{n+1} pour $n > 1$.
3. En déduire que, pour $n \ge 1$, on a : $(x^2 + 1)P_n''(x) - 2(n-1)xP_n'(x) + n(n-1)P_n(x) = 0$

3 Etudes locales

♡⋆ **Exercice 9** Déterminer les limites éventuelles en 0 des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{a^x - b^x}{x}$ $(a, b \in \mathbb{R}_+^*)$
2. $f(x) = \dfrac{e^{\sin(x)} - e^{\tan(x)}}{\sin(x) - \tan(x)}$

♡⋆ **Exercice 10** Donner un équivalent simple des expressions suivantes.

1. $\sin(x) \times \dfrac{\ln(1+x^2)}{x\tan(x)}$ quand x tend vers 0.
2. $\dfrac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$ quand $x \to 0$ (a et b réels fixés, non nuls).
3. $(\cos(x))^{\frac{1}{\sin^2(x)}}$ quand x tend vers 0.
4. Donner un équivalent simple de tan au voisinage de $\Pi/2$.
5. $|\tan(x)|^{\cos(x)}$ quand x tend vers $\Pi/2$.

♡⋆ **Exercice 11** Donner la limite en 0 des fonctions suivantes (si cette limite existe) :

1. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x\tan(x)}$
2. $f(x) = \dfrac{1-\exp(-x)}{\sin(x)}$
3. $f(x) = \dfrac{x\sin x}{1-\cos x}$
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\ln(1+x)}$
5. $f(x) = \dfrac{\exp(\sqrt{1+\sin x}) - e}{\tan x}$
6. $f(x) = x^{(x^x)}$, $g(x) = (x^x)^x$
7. $f(x) = \dfrac{x\ln^4 x}{\tan(\sqrt{x})}$
8. $f(x) = \dfrac{\exp(\frac{1}{\ln x}) - 1}{x}$
9. $f(x) = \dfrac{\sin 2x - \sin x}{\tan^2 x}$
10. $f(x) = \dfrac{\sqrt{\cos x} - 1}{\exp(x^2) - 1}$

♡⋆ **Exercice 12** Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ de : $\exp\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{x(x+1)}{1+x^2}$

♡⋆ **Exercice 13** **Vrai ou faux ?**

1. $n + \sin n = o(n^2)$
2. $\left(\dfrac{10}{9}\right)^n = o(n^3)$
3. $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+\sqrt{n}} \sim 0$
4. $\ln(x) + x \underset{0}{\sim} x$
5. $\dfrac{e^{-x}}{2x^2} \underset{+\infty}{\sim} e^{-x}$
6. $\dfrac{\ln(x)}{x^2-1} \underset{1}{\sim} \dfrac{1}{2}$
7. $\ln(x)e^{4x} \underset{+\infty}{\sim} e^{4x}$
8. $\ln(x) + e^{4x} \underset{+\infty}{\sim} e^{4x}$
9. $\exp(x^2+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \exp(x^2)$

⋆⋆ **Exercice 14** Calculer les développements limités suivants.

1. $\mathrm{DL}_3(1)$ de $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.
2. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f(x) = \dfrac{x}{\exp(x)-1}$.
3. $\mathrm{DL}_2(0)$ de $f(x) = \exp(\dfrac{x}{\cos(x)})$.
4. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $f(x) = \ln(1 + x + \sqrt{1+x})$.
5. $\mathrm{DL}_2(+\infty)$ de $f(x) = \ln(x^2+2x+3) - \ln(x^2+x+1)$.
6. $\mathrm{DL}_3(+\infty)$ de $f(x) = \ln(x\tan(1/x))$.
7. $\mathrm{DL}_2(\Pi/4)$ de $f(x) = \sqrt{\tan(x)}$.
8. $\mathrm{DL}_2(1)$ de $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$.
9. $\mathrm{DL}_2(2\Pi)$ de $f(x) = \sin(\sqrt{x^2 - 3\Pi^2})$.

♡⋆⋆ **Exercice 15**

1. Déterminer des réels a et b tels que $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x}{\ln(1+x)} + \dfrac{a}{x} + b\right) = 0$ et donner pour ces valeurs de a et b un équivalent simple de cette expression quand $x \to 0$.
2. Déterminer des réels a et b tels que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(x)}{\ln(1+x)} + \dfrac{a}{x} + b = 0$. Donner alors un équivalent simple de cette expression quand x tend vers 0.

⋆ **Exercice 16** Déterminer des réels a et b tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \sqrt{x}$ si $0 \le x \le 1$ et $f(x) = ax^2 + bx + 1$ sinon soit dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

⋆ **Exercice 17** Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}_f$ où $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}\, e^{\frac{1}{x}}$.

4 Etude d'une réciproque

$\star\star$ **Exercice 19** Soit $\left\{f\ :\ [\pi/2,\pi[\longrightarrow\mathbb{R},\ x\longrightarrow\dfrac{1}{\sin(x)}\right\}$. Montrer que f a une réciproque notée g. Donner l'ensemble de définition et le domaine de dérivabilité de g. Calculer g'.

$\star\star$ **Exercice 20** On considère la fonction f définie sur $I=]0,+\infty[$ par $f(x)=x+\ln(x)$.
Démontrer que f réalise une bijection de I vers un intervalle J à déterminer. Montrer que sa réciproque, notée g, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall x\in\mathbb{R},\ g'(x)=\dfrac{g(x)}{1+g(x)}$.

$\heartsuit$ $\star\star$ **Exercice 21** On notera respectivement cosh, sinh et tanh les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique définies par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad \sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\quad\text{et}\quad \tanh(x)=\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}.$$

1. Montrer, en étudiant ses variations, que tanh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à préciser.
   On note artanh “ argument tangente hyperbolique ” sa réciproque.
2. Exprimer la dérivée de tanh en fonction de tanh.
3. Démontrer que artanh est impaire.
4. Démontrer que artanh est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
5. Exprimer artanh à l'aide de fonctions usuelles.
6. Déterminer un développement limité à l'ordre 5 de artanh en 0.
7. Montrer que la fonction cosh réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers un intervalle à déterminer. Déterminer explicitement sa réciproque, que l'on notera argch, ainsi que la dérivée de cette réciproque.
8. Montrer que la fonction sinh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle à déterminer. On notera argsh cette réciproque. Déterminer la dérivée de argsh, sans calculer argsh.

$\heartsuit$ $\star\star$ **Exercice 22** Montrer que la fonction f définie par $f(x)=\arctan(x)+\cosh(x)-1$ est bijective au voisinage de 0. Montrer que f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 et le calculer. (Pour le calcul, on pourra écrire a priori $f^{-1}(x)=a+bx+cx^2+dx^3+o(x^3)$, puis déterminer la valeur de a, et enfin calculer les autres coefficients en écrivant que $f^{-1}\circ f=Id$ au voisinage de 0).

Exercices issus de la Banque CCINP

Analyse, exercice 3

1. On pose $g(x)=\mathrm{e}^{2x}$ et $h(x)=\dfrac{1}{1+x}$.
   Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.
2. On pose $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$.
   En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.
3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

Analyse, exercice 4

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ et soit $x_0\in]a,b[$.
   On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et que f est dérivable sur $]a,x_0[$ et sur $]x_0,b[$.
   Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$.
3. Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\Longrightarrow$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.
   Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$ si $x\neq 0$ et $g(0)=0$.