Programme de colle. Semaine n°16 : du 03/02 au 07/02/2025.

I : Compléments sur les variables aléatoires discrètes : voir le programme précédent

II : Endomorphismes des espaces euclidiens

a) Isométries vectorielles d'un espace euclidien
Un endomorphisme d'un espace euclidien est une isométrie vectorielle s'il conserve la norme. Caractérisations par la conservation du produit scalaire, par l'image d'une base orthonormée. Exemples : symétries orthogonales, réflexions.
Groupe orthogonal : inclus dans le groupe linéaire $\mathcal{G}\ell(E)$, contient Id_E, stable par composition et passage à l'inverse. Notation $\mathrm{O}(E)$.
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.
b) Matrices orthogonales
Une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $A^\top A = I_n$. Interprétation en termes de colonnes et de lignes.
Caractérisation comme matrice de changement de base orthonormée.
Caractérisation d'une isométrie vectorielle à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée.
On mentionne la terminologie « automorphisme orthogonal », tout en lui préférant celle d'« isométrie vectorielle ».
Groupe orthogonal : inclus dans le groupe linéaire $\mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R})$, contient I_n, stable par composition et passage à l'inverse. Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{O}(n)$.
Déterminant d'une matrice orthogonale. Groupe spécial orthogonal. Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}(n)$.
Orientation. Bases orthonormées directes.
c) Isométries vectorielles d'un plan euclidien
Description des matrices de $\mathrm{O}_2(\mathbb{R})$, de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. Commutativité de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.
Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté. On introduit à cette occasion, sans soulever de difficulté, la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs non nuls.
Classification des isométries vectorielles d'un plan euclidien.
d) Réduction des endomorphismes autoadjoints et des matrices symétriques réelles
Endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien. Notation $\mathcal{S}(E)$.
Caractérisation des projecteurs orthogonaux.
Caractérisation d'un endomorphisme autoadjoint à l'aide de sa matrice dans une base orthonormée.
On mentionne la terminologie « endomorphisme symétrique », tout en lui préférant celle d'« endomorphisme autoadjoint ».
Théorème spectral : tout endomorphisme autoadjoint d'un espace euclidien admet une base orthonormée de vecteurs propres.
Forme matricielle du théorème spectral.
Endomorphisme autoadjoint positif, défini positif. Caractérisation spectrale (*i.e.* à l'aide du spectre). Notations $\mathcal{S}^+(E)$, $\mathcal{S}^{++}(E)$.
Matrice symétrique positive, définie positive. Caractérisation spectrale. Notations $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

III : Questions de cours

1. Si la variable aléatoire X^2 est d'espérance finie, alors X est elle-même d'espérance finie (dem).
2. $\mathrm{V}(aX+b) = a^2\,\mathrm{V}(X)$ (dem).
3. $\mathrm{E}(X) = G'_X(1)$ (admis dans le cas général, démontré dans le cas où le rayon de convergence est strictement supérieur à 1). Les étudiants doivent savoir retrouver l'expression de $\mathrm{V}(X)$ en fonction de $G'_X(1)$ et de $G''_X(1)$ en cas d'existence (en paticulier lorsque le rayon de convergence est strictement supérieur à 1).
4. Série génératrice de la loi binomiale (dem).
5. Espérance et variance de la loi géométrique, de la loi de Poisson (dem).
6. Définition et caractérisations d'une isométrie vectorielle (dem)
7. Définition et caractérisations des matrices orthogonales (dem)
8. Déterminant d'une matrice orthogonale (dem), groupe spécial orthogonal (énoncé)
9. Changement de bases orthonormées et matrice de passage orthogonale (dem)
10. Description des matrices orthogonales de taille 2 (énoncé) Description des isométries directes et indirectes d'un espace euclidien de dimension 2 (énoncé)
11. Endomorphismes auto-adjoints : définition, caractérisation matricielle (dem)
12. Propriétés sur les sous-espaces propres d'un endomorphisme auto-adjoint (dem)
13. Théorème spectral (énoncé)
14. Endomorphismes autoadjoint positif, défini positif : definition et caractérisation à l'aide des valeurs propres (dem)