I : Endomorphismes des espaces euclidiens : voir le programme précédent.

II : Compléments sur l'intégration

1) Suites et séries de fonctions intégrables *Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de convergence simple et de domination (resp. convergence de la série des intégrales), sans expliciter celles relatives à la continuité par morceaux.*

Théorème de convergence dominée : si une suite (f_n) de fonctions continues par morceaux sur I converge simplement vers une fonction f continue par morceaux sur I et s'il existe une fonction φ intégrable sur I vérifiant $|f_n| \leqslant \varphi$ pour tout n, alors les fonctions f_n et f sont intégrables sur I et : $\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_I f(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème d'intégration terme à terme : si une série $\sum f_n$ de fonctions intégrables sur I converge simplement, si sa somme est continue par morceaux sur I, et si la série $\sum \int_I |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ est intégrable sur I et de plus : $\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t$. *On peut rencontrer des exemples sur lesquels cet énoncé ne s'applique pas, mais dans lesquels l'intégration terme à terme peut être justifiée par le théorème de convergence dominée pour les sommes partielles.*

2) Régularité d'une fonction définie par une intégrale à paramètre

Pour l'application pratique des énoncés de ce paragraphe, on vérifie les hypothèses de régularité par rapport à x et de domination, sans nécessairement expliciter celles relatives à la continuité par morceaux par rapport à t.

Théorème de continuité : si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que :

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$;

alors la fonction $x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur A.

En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation.

Théorème de convergence dominée à paramètre continu : si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$, a une borne de A et f une fonction définie sur $A \times I$ telle que :

- pour tout $t \in I$, $f(x,t) \xrightarrow[x\to a]{} \ell(t)$;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \ell(t)$ sont continues par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $|f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$;

alors $\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to a]{} \int_I \ell(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème de dérivation : si A et I sont deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $A \times I$, telle que :

- pour tout $t \in I$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur I ;
- pour tout $x \in A$, $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur I ;
- il existe une fonction φ intégrable sur I, telle que pour tout $(x,t) \in A \times I$, on ait $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$;

alors la fonction $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A et vérifie : $\forall x \in A, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t$.

En pratique, on vérifie l'hypothèse de domination sur tout segment de A, ou sur d'autres intervalles adaptés à la situation. Extension à la classe $\mathscr{C}^k$ d'une intégrale à paramètre, sous hypothèse de domination de $t \mapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ et d'intégrabilité des $t \mapsto \dfrac{\partial^j f}{\partial x^j}(x,t)$ pour $0 \leqslant j < k$.

Exemples d'études de fonctions définies comme intégrales à paramètre : régularité, étude asymptotique, exploitation d'une équation différentielle élémentaire. L'unicité de la solution d'un problème de Cauchy adapté sera explicitement admise.

III : Questions de cours

1. Définition et caractérisations d'une isométrie vectorielle (dem)
2. Définition et caractérisations des matrices orthogonales (dem)
3. Déterminant d'une matrice orthogonale (dem), groupe spécial orthogonal (énoncé)
4. Changement de bases orthonormées et matrice de passage orthogonale (dem)
5. Description des matrices orthogonales de taille 2 (énoncé) Description des isométries directes et indirectes d'un espace euclidien de dimension 2 (énoncé)
6. Endomorphismes auto-adjoints : définition, caractérisation matricielle (dem)
7. Propriétés sur les sous-espaces propres d'un endomorphisme auto-adjoint (dem)
8. Théorème spectral (énoncé)
9. Endomorphismes autoadjoint positif, défini positif : definition et caractérisation à l'aide des valeurs propres (dem)
10. Théorème de convergence dominée (pour les suites d'intégrales) (énoncé)
11. Théorème d'intégration terme à terme (pour les intégrales de séries de fonctions) (énoncé)
12. Continuité de $x \mapsto \int_I f(x,t)dt$ (énoncé) ou Dérivabilité de $x \mapsto \int_I f(x,t)dt$ (énoncé) ou Caractère C^k de $x \mapsto \int_I f(x,t)dt$ (énoncé)