1 Couples de VAR finies

* **Exercice 1** Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n (où $n \geq 2$) et deux boules noires numérotées 1 et 2. On effectue le tirage de toutes le boules de l'urne, une à une, et sans remise (évidemment...) On appelle X le rang d'apparition de la première boule blanche et Y celui du premier numéro 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.
3. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

* **Exercice 2** On lance un dé. Soit X le reste de la division euclidienne par 2 du nombre indiqué par le dé et soit Y le reste de la division par 3. Donner la loi conjointe et les lois marginales du couple (X, Y). Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Refaire l'exercice en prenant les restes des divisions par 2 et par 4.

* **Exercice 3** Luc tire sur une cible avec la probabilité $p \in]0,1[$ d'atteindre cette cible. Luc tire n fois de suite ($n \in \mathbb{N}^*$). A l'issue de ces n tirs, Vincent comptabilise le nombre de fois où la cible a été atteinte ; mais Vincent est distrait et il affiche le bon résultat avec une probabilité $\frac{1}{2}$ et le bon résultat plus 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$. Soit X la variable aléatoire réelle égale au résultat affiché par Vincent. Déterminer la loi de X et son espérance.

** **Exercice 4** On considère n urnes $U_1, \cdots, U_n$ où $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in [\![1 \,;\, n]\!]$ l'urne U_k contient k boules numérotées de 1 à k. Laurence choisit une urne au hasard et Dominique tire dans cette urne une boule au hasard. On définit les variable aléatoire réelle X et Y par :
$X=$ numéro de l'urne choisie par Laurence et $Y =$ numéro de la boule tirée par Dominique.
Déterminer la loi du couple (X, Y), la loi de X, la loi de Y, ainsi que $E(Y)$ et $V(Y)$. Les variable aléatoire réelle X et Y sont-elles indépendantes ?

* **Exercice 5** Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(1, p)$.

1. Quelle est la loi de $X + Y$? De $X - Y$?
2. les variable aléatoire réelle $X + Y$ et $X - Y$ peuvent-elles être indépendantes ?

♡ * **Exercice 6** Dans une usine, il y a N ouvriers. La probabilité qu'un ouvrier soit accidenté est p. Les accidents sont indépendants. La probabilité qu'un ouvrier accidenté soit indemnisé est a, les indemnisations étant indépendantes. Soit Y le nombre d'ouvriers indemnisés. Quelle est la loi de Y ? Calculer $E(Y)$.

♡ * **Exercice 7** Soient $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(m, p)$ deux variables aléatoires binomiales de même paramètre p. On suppose que X et Y sont indépendantes. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant que $X + Y = k$.

** **Exercice 8** On choisit deux nombres X et Y dans $[\![1 \,;\, n]\!]$, au hasard et indépendamment l'un de l'autre. Soit $S = \min(X, Y)$ et soit $T = \max(X, Y)$. Calculer :

1. la loi de (S, T)
2. les lois de S et de T
3. les espérances de S et T, ainsi que leur covariance
4. la loi de $S + T$

* **Exercice 9** Soient X et Y deux v.a.r. de Bernoulli et soit $p \in \mathbb{R}$ tel que la loi du couple (X, Y) soit donnée par le tableau :

$Y \backslash X$	0	1
0	$\frac{1}{6} + p$	$\frac{1}{3} - p$
1	$\frac{1}{2} - p$	p

1. Que doit vérifier p pour que ce tableau représente bien la loi conjointe d'un couple de v.a.r. ?
2. Déterminer alors les lois marginales de ce couple. Calculer $E(X)$, $V(X)$, $E(Y)$, $V(Y)$.
3. Calculer $\operatorname{cov}(X, Y)$. Pour quelles valeurs de p les v.a.r. X et Y sont-elles indépendantes ?

****Exercice 10** Soient X_1 et X_2 deux $V.A.R.$ indépendantes qui suivent la loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
Soit $A = \begin{pmatrix} X_1 & 1 \\ 0 & X_2 \end{pmatrix}$.
Quelle est la probabilité que A soit diagonalisable ?

****Exercice 11** Soient X et Y deux VARD indépendantes suivant la loi géométrique de paramètres respectifs a et b appartenant à $]0,1[$.

1. Déterminer la loi de $Z = X - Y$.
2. On considère la variable aléatoire T définie par :

$$T = \begin{cases} 1 & \text{si } X \leqslant Y \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Déterminer la loi de T.
3. Calculer $\operatorname{cov}(Z, T)$ et montrer qu'elle est négative. Commentaire ?

2 Couples (ou familles) de VAR discrètes infinies

* **Exercice 12** 1) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs λ et μ. Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, déterminer la loi de X sachant que $X + Y = n$.
2) Même question lorsque X et Y suivent des lois géométriques de même paramètre p.

* **Exercice 13** On se donne $p \in]0, 1[$ et on pose $q = 1 - p$.
Soient X, Y et Z trois variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant la même loi définie par : $X(\Omega) = Y(\Omega) = Z(\Omega)$ et $\forall k \in \mathbb{N},\ P(X = k) = P(Y = k) = P(Z = k) = pq^k$.
Calculer $P(X = Y),\ P(X \geq 2Y)$ et $P(X + Y \leq Z)$.

** **Exercice 14**

1. Soient X, Y deux v.a.r. indépendantes suivant une même loi. On pose $U = |X - Y|$ et $V = \min(X, Y)$.
   (a) On suppose que X et Y suivent une loi géométrique de paramètre p. Déterminer la loi du couple (U, V) et en déduire que U et V sont indépendantes.
   (b) On suppose maintenant que les variables U et V sont indépendantes et que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X = n) = P(Y = n) \neq 0.$$
   Montrer que la loi commune à X et Y est géométrique.

* **Exercice 15** Soit (X, Y) un couple de v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ tel que :
$$\forall (j, k) \in \mathbb{N}^2,\ P\left(X = j \bigcap Y = k\right) = \frac{(j + k)!\lambda^{j+k}}{e \times j! \times k!}$$

1. Déterminer λ pour que ce soit la loi d'un couple.
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $E(2^{x+y})$ si elle existe.

** **Exercice 16** Une urne contient des jetons numérotés de 1 à k en proportion p_j ($p_j \in]0, 1[$) (pour $j \in [\![1\ ;\ k]\!]$, la proportion de jetons de numéro j est p_j). On effectue n tirages avec remise.

1. Déterminer la loi de N_i où N_i est le nombre de jetons tirés portant le numéro i.
2. (a) Pour $i \neq j$, déterminer la loi de $N_i + N_j$, son espérance et sa variance.
   (b) Calculer la covariance de N_i et N_j et vérifier que le coefficient de corrélation linéaire est bien compris entre -1 et 1. Dans quel cas vaut-il -1 ? Que vous inspire ce résultat ?
3. **(***)** On pose Z=“nombre de numéros dont les jetons n'ont pas été tirés”.
   (a) Déterminer X_k de telle sorte que $Z = \displaystyle\sum_{j=1}^{k} X_j$.
   (b) Calculer $E(Z)$. Vérifier ce résultat pour $n = 1$. Calculer, pour $k \geq 2$, la limite de $E(Z)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (c) A-t-on : $P(Z \geq 1) \leq E(Z)$? Montrer que $P(Z = 0)$ tend vers 1 quand $n \to +\infty$.
   (d) Trouver la limite de $V(Z)$ quand n tend vers l'infini (k étant toujours fixé).

** **Exercice 17** Soit X une V.A.R. discrète sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, vérifiant $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$.

1. Rappeler le théorème liant l'espérance d'une variable aléatoire discrète à valeurs entières et la série $\sum P(X \geq n)$.
2. Application à un problème concret. Un horticulteur plante n oignons de narcisse dans un jardin (on supose $n \in \mathbb{N}^*$). Chaque oignon est susceptible de fleurir au printemps et ne donne une fleur qu'avec la probabilité p. De plus, si il donne une fleur une année, il refleurit de manière certaine les années suivantes, mais s'il ne donne pas de fleur la première année, cela n'influe en rien sur ce qui est susceptible de se passer les années suivantes.
   Pour $j = 1, 2, \ldots, n$, on note X_j le nombre aléatoire d'années nécessaires au narcisse numéro j pour produire une première fleur. On suupose que $X_1, X_2, \ldots X_n$ sont des V.A.R. indépendantes. Justifier que :
   $P\left((X_1 \leq k) \cap (X_2 \leq k) \cdots \cap (X_n \leq k)\right) = \displaystyle\prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq k)$.
   On note X le nombre aléatoire d'années au bout duquel le jardin sera, pour la première fois, fleuri de n narcisses.
   (a) Exprimer X en fonction de $X_1, X_2, \ldots, X_n$ et calculer, $P(X > k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
   (b) En déduire que X admet une espérance et exprimer cette espérance comme somme d'une série (convergente..)

♡ ***Exercice 18** **Loi binomiale négative ou loi de Pascal.** Dans tout l'exercice, r est un entier strictement positif.

1. Soient $X_1, \cdots, X_r$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes, suivant la même loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $S_r = X_1 + \cdots + X_r$.
   (a) Déterminer la fonction génératrice de S_r.
   (b) En déduire la loi de S_r.
   (c) S_r admet-elle une espérance ? Une variance ?
2. On lance un dé équilibré indéfiniment. Donner la loi du rang du r-ème numéro 6 obtenu.

***Exercice 19** Soient $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $G_1, \cdots, G_n$ leurs séries génératrices respectives.
Calcuelr, pour $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ entiers naturels, la série génératrice de $Y = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_n X_n$.

3 Suites infinies de VA discrètes

***Exercice 20** Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de Bernoulli de même paramètre p, indépendantes. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on définit $Y_i = X_i X_{i+1}$.

1. Soit $i \in \mathbb{N}$. Quelle est la loi de Y_i ?
2. Soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$. Sans déterminer la loi de S_n, déterminer $E(S_n)$ et $V(S_n)$.

** **Exercice 21** N.B. : exercice figurant déjà **partiellement** dans une feuille d'exercices précédente.
Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $a + b < 1$.
Un interrupteur admet deux positions que l'on note 0 et 1. Si, à l'instant n, il est en position 0, il sera encore en position 0 à l'instant $n+1$ avec la probabilité $1-a$ et passera en position 1 avec la probabilité a. De même, s'il est en position 1, il y restera l'instant suivant avec la probabilité $1-b$ et basculera en position 0 avec la probabilité b.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit X_n la position de l'interrupteur à l'instant n.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{pmatrix} P([X_{n+1} = 0]) \\ P([X_{n+1} = 1]) \end{pmatrix} = A.\begin{pmatrix} P([X_n = 0)] \\ P([X_n = 1]) \end{pmatrix} \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1-a & b \\ a & 1-b \end{pmatrix}$$
2. Si l'on suppose que X_0 suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{a}{a+b}$, déterminer la loi de la variable X_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Dans le cas général, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n suit une loi de Bernoulli dont on déterminera le paramètre p_n.
4. Calculer $\lim p_n$.
5. Calculer, pour tout n, la covariance entre X_n et X_{n+1}. Quelle est la limite de la suite $(\mathrm{cov}(X_n, X_{n+1})$?

4 Inégalités probabilistes

***Exercice 22** Une entreprise fabrique des jouets électroniques. Après la fabrication de ces jouets, malgré des contrôles, 0,6% des jouets restent défectueux : un jouet sortant de l'entreprise a ainsi la probabilité 0,006 d'être défectueux. On considère un lot de n jouets et parmi ceux-ci on appelle X_n le nombre de jouets défectueux. On considère que le stock est très grand par rapport à n et donc que la proportion de jouets défecteux reste inchangé si l'on sort p jouets du stock, avec $p \leq n$.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire X_n ?
2. Pour $n = 500$, par quelle loi peut-on approcher la loi de la variable aléatoire X_n ? En déduire, pour cette valeur de n, une approximation de la probabilité qu'il y ait au plus 2 jouets défectueux.

* **Exercice 23** Une urne contient une proportion inconnue p de boules blanches. On effectue n tirages avec remise de 1 boule. Soit Y_n la proportion de boules blanches obtenues sur les n tirages.

1. Calculer $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.
2. Montrer que : $\forall \varepsilon > 0,\ P(|Y_n - p| < \varepsilon) \geq 1 - \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$.
3. On veut estimer p à 0,01 près, avec une probabilité supérieure à 95%. Combien de tirages faut-il effectuer au minimum ?

***__Exercice 24__ 1. Soit X une variable aléatoire discrète définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Soit h une fonction réelle positive et croissante sur $\mathbb{R}$.
Montrer que pour tout réel a : $P(X \geq a) \leq \dfrac{E(h(X))}{h(a)}$.
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$ (on a donc $P(X=1)=p$). Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose : $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} X_k$.
2. Soit $\varepsilon > 0$. Que peut-on dire de $P(|\overline{X}_n - p| \geqslant \varepsilon)$?
3. Soit a tel que $p < a < 1$.
a) Montrer que pour tout réel $\lambda > 0$: $P(\overline{X}_n \geq a) \leq \left(E(e^{\lambda X_1})\right)^n e^{-an\lambda}$.
b) En déduire que $P(\overline{X}_n \geq a) \leq e^{-nh_p(a)}$, où pour tout $x \in]0,1[$, on a posé :

$$h_p(x) = x \ln\left(\frac{x}{p}\right) + (1-x)\ln\left(\frac{1-x}{1-p}\right)$$

4. Soit a tel que $0 < a < p$. Deduire de ce qui précède une majoration de $P(\overline{X}_n \leq a)$
*__Exercice 25__ On va au casino.... Pour la table de jeu à laquelle nous nous installons, la mise pour chaque partie est de 1 euro. L'observation montre qu'une partie est gagnée avec la probabilité $\dfrac{1}{10}$, perdue avec la probabilité $\dfrac{9}{10}$. Toute partie gagnée rapporte 3 euros. Les différentes parties sont indépendantes. Une personne décide de jouer N parties ($N \geq 2$). On note X_N la variable aléatoire représentant le nombre de parties gagnées et Y_N la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur.

1. Donner la loi de X_N ainsi que la valeur de l'espérance et de la variance de cette variable.
2. Exprimer Y_N en fonction de X_N. En déduire la valeur de l'espérance et de la variance de Y_N.
3. La personne décide de jouer 60 parties. A l'issue des 60 parties, quelle est la probabilité que le joueur perde moins de 50 euros ? (cette probabilité sera impérativement calculée en utilisant l'annexe située à la fin de l'exercice)

Table de Poisson donnant les probabilités cumulées : $\sum\limits_{i=0}^{k} e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$

k	$\lambda = 3$	$\lambda = 4$	$\lambda = 5$	$\lambda = 6$	$\lambda = 7$
0	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009
1	0,1991	0,0916	0,0404	0,0174	0,0073
2	0,4232	0,2381	0,1247	0,0620	0,0296
3	0,6472	0,4335	0,2650	0,1512	0,0818
4	0,8153	0,6288	0,4405	0,2851	0,1730
5	0,9161	0,7851	0,6160	0,4457	0,3007
6	0,9665	0,8893	0,7622	0,6063	0,4497
7	0,9881	0,9489	0,8666	0,7440	0,5987
8	0,9962	0,9786	0,9319	0,8472	0,7291
9	0,9989	0,9919	0,9682	0,9161	0,8305
10	0,9997	0,9972	0,9863	0,9574	0,9015
11	0,9999	0,9991	0,9945	0,9799	0,9467
12	1,0000	0,9997	0,9980	0,9912	0,9730
13		0,9999	0,9993	0,9964	0,9872
14		1,0000	0,9998	0,9986	0,9943
15			0,9999	0,9995	0,9976
16			1,0000	0,9998	0,9990
17				0,9999	0,9996
18				1,0000	0,9999
19					1,0000
20					