Partie 1 : Exercices pour les TD

Exercice 1 Pour tout polynome P de $\mathbb{R}[X]$, on pose :

$$\|P\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \qquad |P\|_2 = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2} \quad \text{et } \|P\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$$

1. Vérifier que ces 3 quantités sont bien définies et qu'elles définissent des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Démontrer que pour tout polynome P, on a $\quad \|P\|_\infty \leqslant \|P\|_2 \leqslant \|P\|_1$
3. Etudier pour chacune des 3 normes, la convergence des suites (P_n) et $Q_n)$:
   $P_n = \dfrac{1}{n}(1 + X + ... + X^{n-1}) \quad$ et $\quad Q_n = \sqrt{n}P_n$
4. Montrer que l'application $P \mapsto P(1)$ est lipschizienne pour la norme $\|.\|_1$.
   L'application $P \mapsto P(1)$ est-elle continue pour $\|.\|_2$? Pour $\|.\|_\infty$?

Exercice 2 On considère dans $\mathbb{R}_1[X]$, les normes N_1 et N_2 définies par :

$$N_1(aX+b) = |a| + |b| \text{ et } N_2(aX+b) = \max_{t\in[0,1]} |at+b|$$

Déterminer les plus petits réels positifs α et β tels que : $N_2 \leqslant \alpha N_1 \leqslant \beta N_2$

Exercice 3 Soit E un espace vectoriel muni d'une norme N.
On note $\mathcal{B}(\mathbb{N}, E)$ l'ensemble des suites bornées de E.
$\forall (u_n) \in \mathcal{B}(\mathbb{N}, E)$, on pose $\|u\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} N(u_n)$.
Montrer que $\|.\|_\infty$ est une norme sur $\mathcal{B}(\mathbb{N}, E)$.

Exercice 4

1. Montrer que $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables.
2. Montrer qu'il n'existe pas de norme sur $M_2(\mathbb{K})$ telle que
   $$\forall (A, P) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K}).Gl_2(\mathbb{K}), \quad \|P^{-1}AP\| = \|A\|.$$
3. Généraliser le résultat à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 5 (CCP) Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$. Si $f \in E$, on pose $N(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|e^t dt$.
Montrer que N est une norme sur E. Est-elle équivalente à $\| \ \|_\infty$?

Exercice 6 $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\forall A \in E$, on pose $\|A\| = \sup\limits_{i\in[\![1\,;\,n]\!]} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$.
Montrer que $\|.\|$ définit une norme sur E.
Montrer que $\forall (A, B) \in E^2, \quad \|AB\| \leqslant \|A\|.\|B\|$

Exercice 7 Soit A une partie convexe d'un espace vectoriel normé E.
Montrer que son adhérence $\bar{A}$ est convexe.

Exercice 8 Montrer que $\{x \in \mathbb{R}^n, \quad \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^n$.

♡**Exercice 9** Représenter dans le plan chacun des ensembles suivants et déterminer ceux qui sont : bornées, ouverts, fermés....

1. $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > a\}$ où a est un réel fixé.
2. $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \neq 0\}$
3. $A_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \geq 1\}$
4. $A_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ |x| > 1 \text{ et } y < 2\}$
5. $A_5 = \mathbb{R} \times]-1, 1]$
6. $A_6 = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$
7. $A_7 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ ux + vy + w = 0\}$ où u, v et w sont des réels fixés, tels que $(u,v) \neq (0,0)$.

Exercice 10 Parmi les ensembles suivants, lesquels sont fermés ? ouverts ?
$A_1 = \{x \in E, \quad \|x - a\| \geqslant 4\}$ $\qquad A_2 = \{x \in E, \quad \|x - a\| > 11\}$
$A_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad x^2 - 3xyz + 8z^3 = 2\}$
Dans $\mathbb{R}$, les intervalles $]2, 5[, \quad [-5, 0[\quad [-3, 1]$ et $[7, +\infty[$.

Exercice 11 On se place dans l'espace C des suites réelles bornées, muni de la norme infinie :
$\forall u \in C, \quad \|u\|_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
On note a la suite constante égale à 1 et C_0 le sous espace vectoriel de C formé des suites qui tendent vers 0.
Déterminer la distance de a à C_0.
Rappel : Soit A est une partie non vide d'une espace vectoriel normé. Pour tout x de E, on appelle distance de x à A la quantité $d(x, A) = inf\{d(x, a), \quad a \in A\}$

Exercice 12

1. Pour toute matrice M de $M_n(\mathbb{R})$, on pose $\phi(M) = M^T M$.
   Montrer que ϕ est continue sur $M_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que l'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ des matrices orthogonales de taille n est un fermé borné de $M_n(\mathbb{R})$

Exercice 13 On note $E = \mathcal{C}([0; 1]; \mathbb{R})$ que l'on munit de la norme infinie.

1. Montrer que $f \mapsto \displaystyle\int_0^1 f$ est continue sur E.
2. On note $A = \{f \in E, \|f\|_\infty \leqslant 1 \quad \text{et} \quad f(0) = 0\}$.
   Montrer que A est une partie fermée non vide et bornée de E.
3. Pour tout f de A, on note $\phi(f) = \displaystyle\int_0^1 f$.
   Montrer que ϕ est majorée, mais qu'elle n'atteint pas sa borne supérieure.
   Commentaire ?

Exercice 14 (CCP) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Gamma = \{(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \ / \ AB = BA\}$.

1. Montrer que Γ est fermé dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^2$.
2. Soit $(A, B) \in \Gamma$ tel que $A^k \underset{k\to+\infty}{\to} P$ et $B^k \underset{k\to+\infty}{\to} Q$. Montrer que $P^2 = P, Q^2 = Q$ et $PQ = QP$.

Exercice 15 Soit E un espace vectoriel normé.
Montrer que l'adhérence d'un sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de E.
Soit H un hyperplan de E. Montrer que H est fermé ou bien dense dans E.

Exercice 16 On considère $p = 2$ ou 3 et on se place dans $E = \mathbb{R}^p$ muni de sa structure euclidienne canonique.
Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ tel que l'ensemble des points intérieurs à F est non vide. Montrer que $F = E$.

Exercice 17 Montrer que $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $O_n(\mathbb{R})$ est un fermé borné de $M_n(\mathbb{R})$.
Montrer que $S_n(\mathbb{R})$ est un fermé de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 18 Soit $F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 2 \end{pmatrix} \quad \text{est diagonalisable}\right\}$.
Montrer que F est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 19 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1.
Montrer que f est lipschitzienne sur $\mathbb{R}$ si et seulement si f' est bornée.
Montrer que le produit de deux fonctions bornées et lipschitziennes sur $\mathbb{R}$ est une fonction lipschitzienne.
Montrer que le produit de deux fonctions lipschitziennes sur $\mathbb{R}$ n'est pas toujours lipschitzienne.

Exercice 20 On assimile tout vecteur $x = (x_1, \cdots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ au vecteur $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on définit l'application $\quad f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par : $\quad f(x) = X^T AX$

1. Montrer que f est continue.
2. On note $S = \{x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\|_2 = 1\}$. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que :
   $\forall X \in S, \quad a \leqslant f(x) \leqslant b$ **et** $\exists (X_1, X_2) \in S^2, \quad f(X_1) = a \quad \text{et} \quad f(X_2) = b$
3. On suppose de plus que A est une matrice symétrique.
   Préciser a et b en fonction des valeurs propres de A.

Exercice 21 (CCP) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que $4A^3 + 2A^2 + A = 0$.

1. Montrer que pour tout $P \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{C})$, l'application $M \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{C}) \mapsto P^{-1}MP$ est continue.
2. Montrer que les valeurs propres de A sont de module $\leqslant \frac{1}{2}$.
   En admettant que A est diagonalisable, montrer que $\lim\limits_{k \to +\infty} A^k = 0$.
3. Montrer que toute suite d'entiers relatifs qui converge est stationnaire.
4. Montrer que A est nilpotente. Que peut-on alors dire de A ?

Exercice 22 (CCP) Sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E = \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, on définit une norme $\| \ \|$ en posant, pour une matrice $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in E$, $\|M\| = \max\limits_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |m_{i,j}|$.

1. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ et $P \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{C})$. Montrer que les applications $M \mapsto MX$ et $M \mapsto P^{-1}MP$ sont continues.
2. Montrer que l'application $(M, N) \mapsto MN$ est continue.
3. Soit $A \in E$. On suppose que la suite $(\|A^n\|)_{n\geqslant}$ est bornée.
   Montrer que les valeurs propres de A sont de module $\leqslant 1$.
4. Soit $B \in E$. On suppose que $(B^n)_{n \geqslant 0}$ converge vers $C \in E$.
   Montrer que $C^2 = C$ et que le spectre de C est inclus dans $\{0, 1\}$.
   Montrer que les valeurs propres de B sont de module $\leqslant 1$.
   Si λ est une valeur propre de B de module 1, montrer que $\lambda = 1$.

Partie 2 : Exercices d'oral

Exercice 23 Soit A une partie non vide d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé E.

1. Rappeler la définition d'un point adhérent à A, en termes de voisinages ou de boules.
2. Démontrer que : $x \in \bar{A} \Longleftrightarrow \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que, $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \in A$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = x$.
3. Démontrer que, si A est un sous-espace vectoriel de E, alors $\bar{A}$ est un sous-espace vectoriel de E.
4. Démontrer que si A est convexe alors $\bar{A}$ est convexe.

Exercice 24 Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :

   P1. f est continue sur E.

   P2. f est continue en 0_E.

   P3. $\exists k > 0$ tel que : $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leqslant k \|x\|_E$.
2. Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par : $\|f\|_\infty = \sup\limits_{x \in [0;1]} |f(x)|$. On considère l'application φ de E dans $\mathbb{R}$ définie par : $\varphi(f) = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$.

   Démontrer que φ est linéaire et continue.

Exercice 25 On note E l'espace vectoriel des applications continues de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$.
On pose : $\forall\, f \in E$, $N_\infty(f) = \sup\limits_{x \in [0;1]} |f(x)|$ et $N_1(f) = \displaystyle\int_0^1 |f(t)|\mathrm{d}t$.

1. (a) Démontrer que N_∞ et N_1 sont deux normes sur E.
   (b) Démontrer qu'il existe $k > 0$ tel que, pour tout f de E, $N_1(f) \leq kN_\infty(f)$.
   (c) Démontrer que tout ouvert pour la norme N_1 est un ouvert pour la norme N_∞.
2. Démontrer que les normes N_1 et N_∞ ne sont pas équivalentes.

Exercice 26 Énoncer quatre théorèmes différents ou méthodes permettant de prouver qu'une partie d'un espace vectoriel normé est fermée et, pour chacun d'eux, donner un exemple concret d'utilisation dans $\mathbb{R}^2$.
Les théorèmes utilisés pourront être énoncés oralement à travers les exemples choisis.
Remarques :

1. On utilisera au moins une fois des suites.
2. On pourra utiliser au plus une fois le passage au complémentaire.
3. Ne pas utiliser le fait que $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble vide sont des parties ouvertes et fermées.

Exercice 27 Soit E un espace vectoriel normé. Soient A et B deux parties non vides de E.

1. (a) Rappeler la caractérisation de l'adhérence d'un ensemble à l'aide des suites.
   (b) Montrer que : $A \subset B \Longrightarrow \overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Montrer que : $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
   Remarque : une réponse sans utiliser les suites est aussi acceptée.
3. (a) Montrer que : $\overline{A \cap B} \subset \overline{A} \cap \overline{B}$.
   (b) Montrer, à l'aide d'un exemple, que l'autre inclusion n'est pas forcément vérifiée (on pourra prendre $E = \mathbb{R}$).

Exercice 28 **Les questions a. et b. sont indépendantes**.
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E.
On note $\overline{A}$ l'adhérence de A.

1. (a) Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.
   (b) Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.
2. On pose : $\forall x \in E,\ d_A(x) = \inf\limits_{a \in A} \|x - a\|$.
   (a) Soit $x \in E$. Prouver que $d_A(x) = 0 \Longrightarrow x \in \overline{A}$.
   (b) On suppose que A est fermée et que :
   $$\forall (x, y) \in E^2,\ \forall t \in [0, 1],\ d_A(tx + (1 - t)y) \leqslant t d_A(x) + (1 - t) d_A(y).$$
   Prouver que A est convexe.