

Table des matières

I	Rappels	1
II	Dérivée en un point	2
III	Opérations sur les fonctions dérivées	3
III.1	Combinaison linéaire d'applications dérivables	3
III.2	Composée avec une application linéaire : $Lo f$	3
III.3	Composée avec une application bilinéaire : $B(f, g)$	3
III.4	Composée avec une application p -linéaire : $M(f_1, \dots, f_p)$	4
III.5	Composée $f \circ \phi$	4
IV	Fonctions de classe C^1	5
V	Fonctions de classe C^k	5

Dans tout le chapitre $E = \mathbb{R}^n$ et I désigne un intervalle d'intérieur non vide.

On étudie les fonctions définies sur I et à valeurs dans E : $f : \begin{cases} I \rightarrow E \\ t \mapsto (f_1(t), \dots, f_n(t)) \end{cases}$

E étant de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. On note $\|\cdot\|$ une norme sur E .

I Rappels

De manière générale, si $f : t \in I \rightarrow (f_1(t), \dots, f_n(t))$, où les f_i sont des fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, on dit que les f_i sont les **fonctions coordonnées de f** .

Si $n = 2$, on pourra considérer que f est une application qui à un instant $t \in I$ associe un point M du plan, de coordonnées $f(t) = (x(t), y(t))$ (ce qui suppose qu'on ait préalablement choisi un repère du plan). Par ailleurs, les fonctions coordonnées de f sont alors $(t \rightarrow x(t))$ et $(t \rightarrow y(t))$.

De même, si $n = 3$, on pourra considérer que f est une application qui à un instant $t \in I$ associe un point M de l'espace, de coordonnées $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Par ailleurs, les fonctions coordonnées de f sont alors $(t \rightarrow x(t))$, $(t \rightarrow y(t))$ et $(t \rightarrow z(t))$.

Nous pouvons appliquer les définitions et propositions du chapitre sur les espaces vectoriels normés...

Définition 1 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et soit $a \in I$.

On dit que f admet une limite ℓ en a lorsque $\lim_{t \rightarrow a} \|f(t) - \ell\| = 0$.

Une telle limite est unique.... d'après le chapitre précédent.

Proposition 1 Soit $a \in I$ et soit $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbb{R}^n$.

$$\text{Alors : } \left(\lim_{t \rightarrow a} \|f(t) - \ell\| = 0 \right) \iff \left(\forall i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, \lim_{t \rightarrow a} f_i(t) = \ell_i \right)$$

Cette proposition est un cas particulier de la proposition suivante vue dans le chapitre « Espaces vectoriels normés » :

Proposition 2 (Fonctions coordonnées)

Soit $f : A \rightarrow E$ (avec A partie d'un espace vectoriel normé F). Soit $a \in \bar{A}$ et soit $b \in E$.

On note $f_1, \dots, f_p$ les fonctions coordonnées de f et $(b_1, \dots, b_p)$ les coordonnées de b dans la base $\mathcal{B} = \{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p\}$.

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \iff \forall k \in \{1, \dots, p\}, \lim_{x \rightarrow a} f_k(x) = b_k$$

De même que pour les fonctions à valeurs réelles, on peut définir les notions de limite à gauche ($\lim_{t \rightarrow a^-}$ ou $\lim_{t \rightarrow a^-}$, à préciser...) ou de limite à droite...

Définition 2 • On dit que f est continue en a lorsque $\lim_{t \rightarrow a} f(t) = f(a)$, ce qui revient à dire que les coordonnées de f sont continues en a .

- La fonction f est dite continue sur I lorsque ses fonctions coordonnées sont continues sur I .
- On note $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R}^n)$ l'ensemble des fonctions continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Remarque 1 si f et g sont des fonction continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ et λ est une fonction continue sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors $f + \lambda g$ est aussi continue sur I .

Si $n = 3$, alors $f \wedge g$ est continue.

Si $n = 2$, alors $\det(f, g)$ est continue. Etc...

II Dérivée en un point

Définition 3 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $a \in I$.
 f est dérivable en a si et seulement si $\tau_a(f)$ admet une limite $l \in \mathbb{R}^n$ en a .

Avec $\tau_a(f)(t) = \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$ pour $t \in I$ et $t \neq a$.

Notation : $\lim_{t \rightarrow a} \frac{f(t) - f(a)}{t - a} = f'(a) = \frac{df}{dt}(a)$

Proposition 3 (Autre formulation)

f est dérivable en a si et seulement si : il existe $\ell \in \mathbb{R}^n$ et $\varepsilon : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ tels que

$$\forall t \in I, f(t) = f(a) + (t - a)\ell + (t - a)\varepsilon(t) \quad \text{avec} \quad \lim_{t \rightarrow a} \varepsilon(t) = 0$$

Exemple 1 Pour $E = \mathbb{R}^2$, $f(t) = (x(t), y(t))$ coordonnées d'un point M en fonction du temps t .
 $f'(t_0)$ représente la vitesse instantanée du point à l'instant t_0 .

Proposition 4 (La dérivabilité en a entraîne la continuité en a)

Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

La réciproque est fausse.

Proposition 5 (Fonctions composantes f_i)

f est dérivable en a si et seulement si chaque composante f_i est dérivable en a .

Exemple 2 Soit $u \in \mathbb{R}^n$ et $h : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable en a . On pose $f(t) = h(t).u$.
 Montrer que f est dérivable en a et calculer $f'(a)$.

Proposition 6 (Conséquences)

- Fonctions à valeur dans $\mathbb{C}$:

$f : t \mapsto f(t) = a(t) + ib(t)$ avec $a = \operatorname{Re}(f)$ et $b = \operatorname{Im}(f)$

f est dérivable en t_0 si et seulement si a et b sont dérivables en t_0 .

- Fonctions à valeurs dans un espace vectoriel F de dimension n :

Si $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ est une base de F et si $g : I \rightarrow F$ avec $\forall t \in I, g(t) = \sum_{i=1}^n g_i(t)e_i$,

alors on peut définir la dérivée de g en a :

g est dérivable en a si et seulement si $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ g_i est dérivable en a

Dans ce cas, on a $g'(t) = \sum_{i=1}^n g'_i(t)e_i$

Définition 4 (Fonction dérivée)

f est dérivable sur I si et seulement si f est dérivable en tout point a de I .
Si f est dérivable sur I , on note f' la fonction ($t \mapsto f'(t)$).

Proposition 7 f est dérivable sur I si et seulement si chaque composante f_i est dérivable sur I .

Exemple 3 Coordonnées polaires. On suppose que : $\forall t \in I, f(t) = (r(t) \cos \theta(t); r(t) \sin \theta(t))$
On suppose r et θ dérivables sur I . Montrer que f est dérivable sur I et calculer $f'(t)$.

Exemple 4 Coordonnées cylindriques.

On suppose que : $\forall t \in I, f(t) = (r(t) \cos \theta(t); r(t) \sin \theta(t); z(t))$

On suppose r, θ et z dérivables sur I . Montrer que f est dérivable sur I et calculer $f'(t)$.

Exemple 5 Coordonnées sphériques. On suppose que : $\forall t \in I, f(t) = \rho(t)(\sin \theta(t) \cos \phi(t); \sin \theta(t) \sin \phi(t); \cos \theta(t))$
On suppose r, θ et ϕ dérivables sur I . Montrer que f est dérivable sur I et calculer $f'(t)$.

Caractérisation des fonctions constantes

Proposition 8 (dem) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Alors f est constante si et seulement si : f est dérivable sur I et $\forall t \in I, f'(t) = 0$.

Exemple 6 Trouver un exemple de fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ montrant qu'il n'existe pas de généralisation du théorème de Rolle pour les fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.

III Opérations sur les fonctions dérivées**III.1 Combinaison linéaire d'applications dérivables**

Proposition 9 (dem)

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont dérivables sur I , alors :

pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \lambda f + \mu g$ est dérivable sur I

III.2 Composée avec une application linéaire : $Lo f$

Proposition 10 (dem) Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et si $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q$ est une application linéaire, alors

$$Lo f : I \rightarrow \mathbb{R}^q$$

$$t \mapsto L(f_1(t), \dots, f_n(t))$$

Si f est dérivable sur I , alors $Lo f$ est dérivable sur I et : $\forall t \in I, (Lo f)'(t) = L(f'(t))$

III.3 Composée avec une application bilinéaire : $B(f, g)$

Proposition 11 (dem) Soit $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application bilinéaire.

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}^p$ deux applications dérivables sur I .

On pose $\forall t \in I, h(t) = B(f(t); g(t))$

Alors h est dérivable sur I et

$$\forall t \in I, h'(t) = B(f'(t), g(t)) + B(f(t); g'(t)).$$

Exemple 7 Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux applications dérivables sur I et soit $\langle, \rangle$ un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$.

On pose $h(t) = \langle f(t), g(t) \rangle$.

Montrer que h est dérivable sur I et calculer $h'(t)$.

Remarque 2 Si $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$, alors $\|f\|^2 = \langle f, f \rangle$ donc $\|f\|^2$ est dérivable et $(\|f\|^2)' = 2\langle f', f \rangle$

Application à un cercle ou une courbe tracée sur une sphère : Si pour tout r , $f(t)$ appartient à un cercle donné du plan ou à une sphère donnée de l'espace, alors $\forall t \in I, \|f\|^2 = R^2$ donc $(\|f\|^2)' = 0$, ce qui permet d'affirmer, d'après la proposition ci-dessus, que $2\langle f', f \rangle = 0$ ou encore $f \perp f'$.

Exemple 8 Dérivée d'un produit vectoriel. On se place dans $\mathbb{R}^3$, espace euclidien orienté.

Soient f et g deux fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, dérivables sur I .

Alors $f \wedge g$ est dérivable sur I et :

$$(f \wedge g)' =$$

Exemple 9 Soient f et g des fonctions dérivables sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathcal{B}_0$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$. On pose $d(t) = \det_{\mathcal{B}_0}(f(t), g(t))$. Montrer que la fonction d est dérivable et calculer $d'(t)$.

III.4 Composée avec une application p -linéaire : $M(f_1, \dots, f_p)$

Proposition 12 (non exigible)

Soit $M : \left\{ \begin{array}{l} (\mathbb{R}^n)^p \rightarrow \mathbb{R}^q \\ (x_1, \dots, x_p) \mapsto M(x_1, \dots, x_p) \end{array} \right\}$ une application p -linéaire.

On suppose que : $\forall i \in \llbracket 1 ; p \rrbracket$, la fonction $f_i : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application dérivable sur I .

On pose $\forall t \in I, h(t) = M(f_1(t), \dots, f_p(t))$.

Alors h est dérivable sur I et

$$\forall t \in I, h'(t) =$$

Exemple 10 Soit $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{R}^p$. On suppose que $f_1, \dots, f_p$ sont des applications définies sur $I \subset \mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, et dérivables sur I .

Soit $d : t \mapsto \det_{\mathcal{B}}(f_1(t), \dots, f_p(t))$. Alors d est dérivable et de plus $d'(t) =$

III.5 Composée $f \circ \phi$

Proposition 13 (dem) Soient $\phi : J \rightarrow \mathbb{R}$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ avec $\phi(J) \subset I$ et soit $a \in J$.

- Si ϕ est dérivable en a et si f est dérivable en $b = f(a)$, alors $f \circ \phi$ est dérivable en a et de plus

$$(f \circ \phi)'(a) = \phi'(a) \times f'(\phi(a))$$

- Si ϕ est dérivable sur J et si f est dérivable sur I , alors $f \circ \phi$ est dérivable sur J et de plus :

$$(f \circ \phi)' = \phi' \times f' \circ \phi$$

Exemple 11 $\forall t \in \mathbb{R}, \phi(t) = e^t$ et $f(t) = (\cos t, \sin t)$.

On pose $h(t) = f \circ \phi(t)$. Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $h'(t)$.

IV Fonctions de classe C^1

Définition 5 $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite « de classe C^1 » lorsque f est dérivable sur I et $f' : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est continue.

Proposition 14 (Propriétés) • $\mathcal{C}^1(I, E) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{ de classe } C^1\}$ est un espace vectoriel.

- Si $L : E \rightarrow F$ est linéaire et si $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$, alors $L \circ f : I \rightarrow F$ est de classe C^1 .
- Si $B : E \times F \rightarrow G$ est bilinéaire, et si $f : I \rightarrow E$ et $g : I \rightarrow F$ sont de classe C^1 , alors $t \rightarrow B(f(t); g(t))$ est de classe C^1 sur I .
- Si ϕ est de classe C^1 sur J et si f est de classe C^1 sur I (avec $\phi(J) \subset I$), alors $f \circ \phi$ est de classe C^1 sur J .

Proposition 15 (Théorème de limite de la dérivée. (dem)) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ continue sur I . Soit $a \in I$. On suppose que f est de classe C^1 sur $I \setminus \{a\}$ et que f' admet une limite $\ell \in \mathbb{R}^n$ en a . Alors f est de classe C^1 sur I et $f'(a) = \ell$.

V Fonctions de classe C^k

Définition 6 Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

- f est de classe C^0 sur $I \iff f$ est continue sur I
- f est de classe C^k sur $I \iff f$ est dérivable sur I et f' est de classe C^{k-1} sur I .
- f est de classe C^∞ sur $I \iff f$ est de classe C^k pour tout entier k .

Exemple 12 Si $E = \mathbb{R}^2$, pour $f(t) = (x(t); y(t))$ avec $t = \text{temps}$, le vecteur $f''(t_0)$ est le vecteur accélération à l'instant t_0 .

Proposition 16 (Propriétés) • $\mathcal{C}^k(I, E) = \{f : I \rightarrow \mathbb{R}^n, C^k\}$ est un espace vectoriel.

- Si $L : \mathbb{R}^n \rightarrow F$ est linéaire et si $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$, alors $L \circ f : I \rightarrow F$ est de classe C^k .
- Si $\phi \in \mathcal{C}(J, \mathbb{R})$ et si $f \in \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^n)$ (avec $\phi(J) \subset I$), alors $f \circ \phi$ est de classe C^k sur J .

Proposition 17 (Formule de Leibniz) Soit $B : \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^q \\ (x, y) \mapsto B(x, y) \end{cases}$ une application bilinéaire.

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont de classe C^k sur I ,

alors $B(f, g) : I \rightarrow \mathbb{R}^q$ est de classe C^k et : $(B(f, g))^{(k)} = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} B(f^{(p)}; g^{(k-p)})$

Exemple 13 Soient f et g des fonctions de classe C^k sur I , à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Soit $\lambda \in \mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$. Alors :

- λf est de classe C^k et de plus : $(\lambda f)^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \lambda^{(k-i)} f^{(i)}$
- $\langle f, g \rangle$ est de classe C^k et de plus : $(\langle f, g \rangle)^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \langle f^{(i)}, g^{(k-i)} \rangle$
- Pour $n = 3$, le produit vectoriel $f \wedge g$ est de classe C^k et de plus : $(f \wedge g)^{(k)} = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} f^{(i)} \wedge g^{(k-i)}$
- Si $n = 2$, et si on pose $d(t) = \det_{\mathcal{B}_0}(f(t), g(t))$, alors d est de classe C^k et de plus $d^{(k)}(t) =$