***Exercice 1** Déterminer $\mathcal{D}_f$ pour chacune des fonctions f_k suivantes, puis représenter $\mathcal{D}_f$.

1. $f_1(x,y) = \ln(xy)$ 2. $f_2(x,y) = \ln(x) + \ln(y)$
3. $f_3(x,y) = x^y$ 4. $f_4(x,y) = \sqrt{x+y}$

♡****Exercice 2** Etudier la continuité des applications suivantes.

1. $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin(1/\sqrt{x^2+y^2})$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
2. $f(x,y) = \dfrac{x(y-x)}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = -1$.
3. $f(x,y) = \dfrac{x+y}{|x|+|y|}$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 1$.
4. $f(x,y) = \dfrac{e^{x^4} - e^{y^4}}{(x^2+y^2)^2}$ si $x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 0$.
5. $f(x,y) = (e^{-x^2})(\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2})$ si $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) = 1$.
6. $f(x,y) = x$ si $y < x$ et $f(x,y) = y$ si $x \leq y$.
7. $f(x,y) = x^2$ si $|x| < |y|$ et $f(x,y) = y^2$ si $|x| \geq |y|$.

♡***Exercice 3** Soit f une application définie et continue sur $\mathbb{R}^2$.

1. On suppose que $f((2,0)) = 1$ et que $f((-2,0)) = -1$.
   Montrer que : $\exists (x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f((x,y)) = 0$.
2. On suppose que : $\exists (x_1,y_1)$ tel que $f((x_1,y_1)) > 0$ et $\exists (x_2,y_2)$ tel que $f((x_2,y_2)) < 0$.
   Montrer qu'il existe alors (x_3,y_3) tel que $f((x_3,y_3)) = 0$.

♡***Exercice 4** Soit $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tels que : } x+y \leq 1,\ x \geq 0,\ x-y \leq 1\}$.

1. Représenter E. Montrer que E est une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$.
2. On considère la fonction f définie par $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2-9} \times \sin((\sqrt{x^2+y^2})$.
   Chercher le domaine de définition de f, puis justifier que f est bornée sur E.

♡****Exercice 5** Calculer les dérivées partielles des applications suivantes et montrer qu'elle sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ à préciser.

$$(a)\ f(x,y) = \frac{x^3+y^3}{x(x-2)} \qquad\qquad (b)\ f(x,y) = \frac{\sqrt{x^2+e^y}}{\ln(xy)}$$

*****Exercice 6** Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\begin{cases} \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0) \\ f(0,0) = 0 \end{cases}$

1. Montrer qu'en tout point de $\mathbb{R}^2$, f admet des dérivées partielles par rapport à x et à y et les déterminer.
2. Quelle est la valeur de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ pour tout $y \neq 0$? La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

♡***Exercice 7** Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

On considère la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(\cos(t), \ln(1+t^2))$.
Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer la fonction g'.

***Exercice 8** Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x, y) = y^2 - xy + 4$.

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer $\nabla f_{(2,0)}$, $\nabla f_{(0,2)}$, $\nabla f_{(0,0)}$.
2. Déterminer les points critiques de f sur $\mathbb{R}^2$. Que peut-on en déduire ?
3. Donner un DL_1 en $(2, 0)$ de f.
4. Montrer que f est bornée sur $[-1, 2] \times [2, 3]$.

****Exercice 9** Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

On dit que f est homogène de degré n lorsque : $\forall t \in \mathbb{R}^{+*},\ f(tx, ty) = t^n f(x, y)$.

1. Montrer que si f est homogène de degré n, alors ses dérivées partielles sont homogènes de degré $n-1$. Indication : on peut fixer t et considérer l'application $((x, y) \mapsto (tx, ty) \mapsto f(tx, ty) = t^n f(x, y))$
2. Montrer que si f est homogène de degré n, alors : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = nf(x, y)$.

   Indication : considérer $(t \mapsto (tx, ty) \mapsto f(tx, ty))$, la variable étant t, les réels x et y étant fixés.