Calcul différentiel

Exercice 1 On considère la fonction f définie par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = 2x^2 + y^3$.
Soit $a = (2,1)$. On note $h = (h_1, h_2)$.
Expliciter la différentielle de f en a calculée en h.

Exercice 2 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Pour tout réel x, on pose $g(x) = f(x,x)$ et $h(x) = f(x^2, x)$.
Montrer que g et h sont de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer leur dérivée.

Exercice 3 Pour $(x_1, ..., x_n, h_1, ...h_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ et pour $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et pour un réel t, on note :

$$h(t) = f(x_1 + th_1, ...x_n + th_n)$$

Calculer $h'(t)$

Exercice 4 Soit $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\dfrac{\partial H}{\partial x} = \dfrac{\partial H}{\partial y}$.
Montrer que pour tout réel a, la fonction H est constante le long de la droite d'équation $x + y = a$.
Indication : Poser $u = x + y$, $v = x - y$ *et faire un changement de variable.*

Exercice 5

1. Soit U un ouvert et soit $a \in U$.
   On dit que U est étoilé par rapport à a si pour tout élément b de U, on a $[a,b] = \{a + t(b-a),\ t \in [0,1]\} \subset U$.
   Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert U étoilé par rapport à a. On suppose que les dérivées partielles de f sont nulles.
   Montrer que f est constante.
2. Soit $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ xy \neq 1\}$. Dessiner U.
   Montrer que U est la réunion de deux ouverts convexes et d'un ouvert étoilé par rapport à $(0,0)$.
3. $\forall (x,y) \in U, \quad f(x,y) = \arctan(x) + \arctan(y) - \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)$
   Déterminer le gradient de f, puis simplifier l'expression de f

Exercice 6 Soit f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}$. On dit que f est homogène de degré r si

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall t > 0, f(tx,ty) = t^r f(x,y).$$

Cette relation est appelée relation d'Euler pour f.

1. Montrer que si f est homogène de degré r, alors ses dérivées partielles sont homogènes de degré $r-1$.
2. Montrer que si f est homogène de degré r alors :
   $$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = rf(x,y).$$
   Indication : On porra considérer la fonction φ définie par $\varphi(t,x,y) = f(tx,ty) - t^r f(x,y)$ et étudier les dérivées partielles de φ par rapport à x et à y.
3. On suppose que f est de plus de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que :
   $$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = r(r-1)f(x,y).$$

Exercice 7 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$
Montrer que la quantité $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\cos(t); r\sin(t))dt$ ne dépend pas de r. La calculer

Exercice 8 Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[\times\mathbb{R}$ par $f(x,y) = x^y$. Déterminer le développement limité à l'ordre 2 de f au point $a = (3,2)$.

Exercice 9 On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = \int_x^y e^t \cos(t)\,dt$.
Déterminer les dérivées partielles secondes de f. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 10 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ telle que l'on ait :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \Delta f(x,y) = 0$$

où Δf est le laplacien de f (rappel : $\Delta f = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$). On pose :

$$\forall (r,t) \in \mathbb{R}^2,\ g(r,t) = f(r\cos t, r\sin t).$$

1. Montrer que l'on a : $\forall (r,t) \in \mathbb{R}^2,\ r^2 \dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,t) + r\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,t) + \dfrac{\partial^2 g}{\partial t^2}(r,t) = 0.$
2. On pose : $\forall r \in \mathbb{R},\ \varphi(r) = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(r\cos(t), r\sin(t))\,dt.$
   (a) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $r\varphi'(r)$ pour tout réel r. (Dériver $r\varphi'(r)$).
   (b) En déduire que φ est une application constante sur $\mathbb{R}$.

Recherches d'extrema

Exercice 11 Déterminer les extrema locaux et/ou globaux de la fonction f définie par : $f(x,y) = xy - xy^2 + x^2y$

Exercice 12

1. Montrer que la fonction g définie par : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ g(x,y) = x - y + x^3 + y^3$ n'admet pas d'extremum local sur $\mathbb{R}^2$.
2. (a) Justifier que g admet un maximum et un minimum sur $[0,1]^2$.
   (b) Montrer que l'on a : $\forall (x,y) \in [0,1]^2,\ g(0,y) \le g(x,y) \le g(1,y)$.
   (c) Déterminer le maximum et le minimum de g sur $[0,1]^2$.

Exercice 13 Déterminer l' ensemble de définition puis les extrema locaux des fonctions suivantes :

1. $f(x,y) = x((\ln(x))^2 + y^2)$
2. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$
3. $f(x,y) = (y^2 - x^2)(y^2 - 2x^2)$

Exercice 14 On pose : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} + x^2 - 3$.

1. Montrer que f n'admet pas de maximum local sur l'ouvert

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 < 16\}.$$

2. Montrer que f admet un maximum global sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \le 16\}$ et déterminer ce maximum (en passant en coordonnées polaires).

Exercice 15 On note $\Omega =]0;1[\times]0;1[$. $\forall (x,y) \in \Omega,\ f(x,y) = \dfrac{1}{1-x} + \dfrac{1}{1-y} + \dfrac{1}{x+y}$

1. Montrer que f est de classe C^2 sur l'ouvert Ω. Calculer ses dérivées partielles d'ordre 1 et 2.
2. Déterminer les points critiques de f
3. Montrer que f admet un extremum local sur Ω

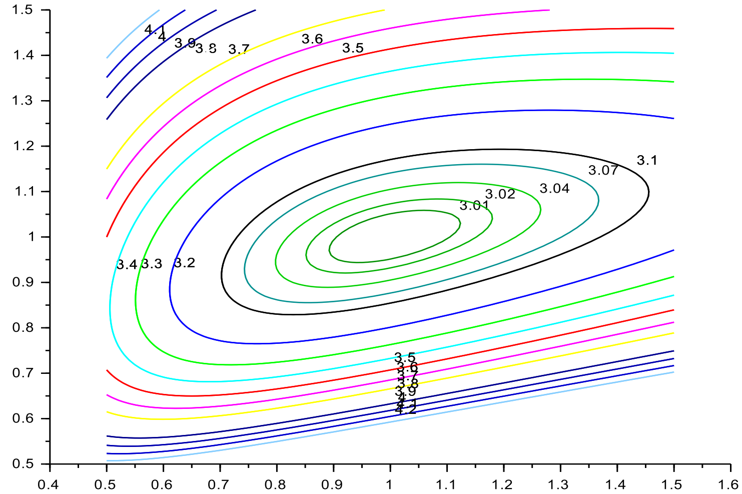
Exercice 16 Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes :
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^3 + xy + y^3$
$\forall (x,y) \in]0;1[\times]0;1[,\ g(x,y) = 4xy + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$
$\forall (x,y) \in]0;1[\times]0;1[,\ h(x,y) = x^2 + y^2 + \dfrac{1}{x+y}$
$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ f(x,y,z) = x^3 + y^2 - xy + z^2$

Exercice 17 $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x,y) = x^2 - 2y^2 - 5xy$.
On note $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0, \text{ et } \quad x+y \leqslant 1\}$ et $D_0 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x > 0,\ y > 0, \text{ et } \quad x+y < 1\}$

1. Représenter D.
2. Montrer que D est un fermé borné et que D_0 est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que f admet un minimum global m et un maximum global M sur D.
4. Montrer que f n'admet pas d'extremum local sur D_0.
5. Déterminer m et M, ainsi que les points où ils sont atteints.

Exercice 18 On considère la fonction f définie sur l'ouvert de $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+}*$ par : $f(x,y) = \dfrac{x}{y^2} + y^2 + \dfrac{1}{x}$

1. Le tracé des lignes de niveau de la fonction f donne :



Etablir une conjecture à partir du graphique quant à l'existence d'un extremum local pour f, dont on donnera la nature, la valeur approximative et les coordonnées du point en lequel il semble être atteint.

2. Vérifier votre conjecture par le calcul.

Exercice 19 Dans cet exercice, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considere la fonction de n variables réelles, notée f, définie par :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k$$

1. Montrer que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^n$.
2. Déterminer le seul point critique $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de f sur $\mathbb{R}^n$.
3. Vérifier que la hessienne de f en ce point est la matrice $A_n = 2(I_n + J_n)$, où I_n désigne la matrice unité de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et J_n la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les éléments sont égaux à 1.
4. Donner les valeurs propres de J_n, puis celles de A_n.
5. En déduire que f admet un minimum local en $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ et vérifier que ce minimum est égal à $-\dfrac{n}{4(n+1)}$

Equations aux dérivées partielles

♡**Exercice 20** Déterminer l'ensemble des fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ telles que :

1. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$.
2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = h(x)$ où h est une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
3. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = h(y)$ où h est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

♡ **Exercice 21** Résoudre, en utilisant les coordonnées polaires :

1. $x\dfrac{\partial f}{\partial y} - y\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$ pour $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}$.
   Résoudre la même équation pour $(x, y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$. Expliciter (r, θ) en fonction de (x, y) dans chacun des cas.
2. $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2 + y^2}$ sur $U = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{-*}$.

Exercice 22 1) Montrer que l'application ϕ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\phi(x, y) = (x - y, x + y)$ est une bijection de classe $\mathcal{C}^1$ et que sa réciproque est aussi de classe $\mathcal{C}^1$.
2) Soit k un réel fixé. Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante : $f + \dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} = k$
Indication : on peut poser $u = x - y$ et $v = x + y$.

♡ **Exercice 23** 1) Soit ϕ définie sur $\mathbb{R}^{+*} \times] - \pi/2, \pi/2[$ par : $\phi(r, \theta) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = (x, y)$.
Montrer que ϕ réalise une bijection de $\mathbb{R}^{+*} \times] - \pi/2, \pi/2[$ vers $\mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$.
Donner sa réciproque ϕ^{-1} ; justifier que ϕ et ϕ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$.
2) Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante : $x\dfrac{\partial f}{\partial x} + y\dfrac{\partial f}{\partial y} - f = x^2 + y^2 + 1$.
On pourra effectuer le changement de variable $(x, y) = \phi(r, \theta)$ en justifiant sa validité.

♡ **Exercice 24** 1) Soit ϕ l'application définie sur $(\mathbb{R}^{+*})^2$ par : $\phi(x, y) = \left(\sqrt{xy}, \dfrac{y}{x}\right)$. Montrer que ϕ réalise une bijection de $(\mathbb{R}^{+*})^2$ vers $(\mathbb{R}^{+*})^2$ et expliciter sa réciproque. Justifier que ϕ et ϕ^{-1} sont de classe $\mathcal{C}^1$.
2) On considère l'équation aux dérivées partielles suivantes, pour $(x, y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$: $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{xy}}$
Soit $F = f \circ \phi^{-1}$. Donner l'équation aux dérivées partielles vérifiée par F et la résoudre.

Exercice 25 Soit $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y > 0\}$. Soit g une fonction continue sur P. On considère l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = g(x, y).$$

1. Dans cette question, on suppose que $g = 0$. Montrer que f vérifie E si et seulement si $f(x, y) = h(x+y)$ où h est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ (on pourra effectuer le même changement de variable que dans l'exercice 19).
2. On suppose que g est de la forme $g(x, y) = \lambda(x)k(x+y)$ où λ et h sont des fonctions continues sur leurs domaines de définition. Soit λ_1 une primitive de λ. Montrer que la fonction f définie par $f(x, y) = \lambda_1(x)k(x + y)$ est une solution particulière de E.
3. Quel résultat a-t-on si $g(x, y) = \lambda(y)k(x + y)$?

Exercice 26 Déterminer toutes les fonctions réelles de classe C^1 sur $]0, +\infty[.\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall (x, y) \in]0, +\infty[\times\mathbb{R}, \quad x\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -6f(x, y)$$

Indication : utilisez les coordonnées polaires

Exercice 27 Déterminer toutes les fonctions réelles de classe C^2 sur $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{y}{x^3}$$

Indication : changement de variables $x = u + v$ et $y = u - v$

Exercice 28

1. Soient I et J deux intervalles ouverts de $\mathbb{R}$ et soit $g : U = I \times J \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Donner la forme de la solution générale de l'équation : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = g$
2. Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = xy$.

Exercice 29 Trouver toutes les applications $f : \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que :

$$x^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

en utilisant le changement de variable : $u = x,\ v = \frac{y}{x}$ après avoir vérifié que ce changement de variable est licite (c'est à dire que la fonction $(x, y) \mapsto (u, v)$ est une bijection de $U = \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$ vers U et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$, ainsi que sa réciproque).

Exercice 30

1. Soit h une fonction réelle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telle que $h(0,0) = 0$ et :
   $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x\dfrac{\partial h}{\partial x}(x, y) + y\dfrac{\partial h}{\partial y}(x, y) = 0$

   Montrer que $h = 0$ (on pourra exploiter $t \mapsto h(tx, ty)$.)
2. On pose $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}$.
   Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ pour $(x, y) \neq (0, 0)$.
   f est-elle C^1 sur $\mathbb{R}^2$?
3. Déterminer toutes les fonctions réelles g de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telles que

$$g(0, 0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad x\frac{\partial g}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}$$

Exercices d'oral

Exercice 31 Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 1$.
Déterminer si f admet des extrema, locaux et/ou globaux.

Exercice 32 Soient α et β deux réels distincts et $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\phi(x, y) = (x + \alpha y, x + \beta y)$$

1. Montrer que ϕ est une bijection de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$.
2. Soit f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$, solution de l'équation aux dérivées partielles
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$
   Posant $g = f \circ \phi^{-1}$, déterminer l'équation vérifiée par g.
3. Choisir α et β pour simplifier l'équation en g et en déduire les solutions de l'équation initiale.

Exercice 33 On pose : $\forall\,(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},\ f\,(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $f\,(0, 0) = 0$.

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

Exercice 34 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2 + y^2 - xy} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ \alpha & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

1. Prouver que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 - xy \geqslant \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$.
2. (a) Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.
   (b) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.
   (a) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \big\{(0, 0)\big\}$ et les calculer.
   (b) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ et donner leur valeur.
   (c) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 35 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$.

1. f admet-elle des extrema locaux sur $\mathbb{R}^2$? Si oui, les déterminer.
2. f admet-elle des extrema globaux sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.
3. On pose $K = [0, 1] \times [0, 1]$. Justifier, oralement, que f admet un maximum global sur K puis le déterminer.