***Exercice 1** **Séries télescopiques :**

1. Décomposer $\dfrac{1}{n^2-1}$ en éléments simples. Puis montrer que la série $\sum \dfrac{1}{n^2-1}$ converge et calculer sa somme.
2. ♡ Déterminer la nature et la somme de la série $\sum \ln\left(1+\dfrac{2}{n(n+3)}\right)$.
3. Montrer que pour tout entier $p \geqslant 1$, la série $\sum \dfrac{1}{n(n+p)}$ converge. On note L_p sa somme.

   On admet que : $\left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\right) = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n$ où γ est une constante (d'Euler) et $\varepsilon_n \to 0$.

   Exprimer L_p en fonction de $H_p = \sum_{k=1}^{p} \dfrac{1}{k}$.
4. (a) Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{n}{n^4+n^2+1}$.

   (b) Montrer qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n}{n^4+n^2+1} = \dfrac{a}{n^2-n+1} + \dfrac{b}{n^2+n+1}$.

   (c) En déduire la valeur de la somme : $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n}{n^4+n^2+1}$.

***Exercice 2** Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs.

1. On suppose dans cette question que $\sum u_n$ converge. On pose $v_n = \dfrac{u_n}{1+u_n}$. Quelle est la nature de $\sum v_n$?
2. On suppose dans cette question que $1-u_n > 0$ à partir d'un certain rang. On pose $w_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$.

   Montrer que $\sum u_n$ et $\sum w_n$ sont de même nature.

****Exercice 3** Calculer la somme suivante, sans oublier de justifier son existence : $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$.

♡***Exercice 4** Dans chacun des cas suivants, étudier la nature de la série de terme général u_n.

a) $u_n = \dfrac{n^4\ln(3n)}{e^n}$. *b)* $u_n = \dfrac{1}{n^2+\sin(n^6)}$. *c)* $u_n = \dfrac{e^{-2n}+n}{n^3+1}$.. *d)* $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin(\dfrac{\pi}{2n})$

e) $u_n = \ln(\cos(1/2n))$ *f)* $\ln(1-\dfrac{1}{2n})$. *g)* $u_n = \ln\left(\dfrac{2+\sin(\frac{1}{n})}{2-\sin(\frac{1}{n})}\right)$ pour $n>0$

***Exercice 5** Étudier la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
2. $u_n = \cos(n\pi)$
3. $u_n = \dfrac{n^2-\cos n}{e^n+3}$
4. $u_n = 2n\sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$
5. $u_n = \dfrac{\sin n}{n^2}$
6. $u_n = \dfrac{e^{in}}{n^3}$
7. $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+2}{n^2}\right)$
8. $u_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}\right)\dfrac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}}}$
9. $u_n = \dfrac{n\cos n}{2^n}$
10. $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\cos(n)$
11. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$

***Exercice 6** Etudier la nature de la suite (u_n) définie par $u_n = \prod_{k=2}^{n}\left(1-\dfrac{1}{k^\alpha}\right)$. Préciser pour quelles valeurs u_n tend vers 0. Montrer que : si (u_n) converge vers une limite non nulle, alors sa limite est un réel strictement positif.

****Exercice 7** On admet que : $\left(\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}\right) = \ln(n)+\gamma+\varepsilon_n$ où γ est une constante (d'Euler) et $\varepsilon_n \to 0$.

Etudier la nature de la série $\sum u_n$ avec $u_n = a^{\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)}$.

****Exercice 8** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = e^{\frac{(-1)^n}{n}} - \left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^2}\right)^n$. Déterminer la nature de $\sum_{n\geq 1} u_n$.

****Exercice 9** 1. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 0}\dfrac{3^n}{1+4^{2n}}$.

2. On note R_n le reste d'ordre n pour tout $n \geq 0$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq R_n \leq \dfrac{1}{4\cdot 5^n}$.
3. Comment obtenir une valeur approchée de la somme à 10^{-3} près ?

♡****Exercice 10** Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$.

1. Déterminer la natures de la série de terme général $f(n)$.
2. Montrer la convergence de la série de terme général $u_n=\displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,dt - f(n)$.

♡****Exercice 11** Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $u_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+k)^2}$.

Montrer que u_n est bien défini pour tout $n\in\mathbb{N}$ et déterminer la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 0}u_n$.

Indication : comparer $\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{(n+k)^2}$ à une intégrale puis en déduire un minoration de u_n.

♡****Exercice 12** Justifier l'existence de $u_n=\displaystyle\sum_{p=n}^{+\infty}\frac{1}{p!}$. Quelle est la nature de $\sum u_n$?

♡***Exercice 13** Justifier la convergence de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ puis calculer la somme (en utilisant $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$).

* **Exercice 14** Soit la série de terme général $u_n=\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

1. Exprimer $\sin(\theta+n\pi)$ en fonction de n et de $\sin\theta$.
2. Démontrer que $\sum u_n$ est une série alternée et étudier la convergence de cette série.

***Exercice 15** Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose $u_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$.

Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

***Exercice 16** Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)$ est alternée et qu'elle converge.

Indication : on montrera que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=(-1)^{n-1}\sin\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)$.

****Exercice 17** Nature des séries dont le terme général est :

(a) $u_n=\dfrac{(-1)^{n+1}n}{4n-3}$ (b) $u_n=\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}dx$ (c) $u_n=\displaystyle\int_{n}^{(n+1)}\frac{\cos(\pi x)}{1+x}dx$

***Exercice 18** Soit $x\in]-1;1[$ et $\theta\in\mathbb{R}$.

Convergence et somme des séries $\sum x^n\cos(n\theta)$ et $\sum x^n\sin(n\theta)$.

***Exercice 19** Justifier et effectuer le produit de Cauchy des séries $\sum\dfrac{a^n}{n!}$ et $\sum\dfrac{b^n}{n!}$.

♡****Exercice 20** Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0>0 \\ \forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}=u_n+u_n^2\end{cases}$

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante et déterminer sa limite.
2. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $P_n=\dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$. Montrer que la série de terme général $P_{n+1}-P_n$ est convergente. En déduire que la suite (P_n) converge vers un réel $\ell>0$.

♡***Exercice 21** **On admettra** que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}=e$.

1. Montrer la convergence et calculer la somme de la série de terme général $u_n=\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p^2(n-p)!}$.
2. Même question avec la série de terme général $u_n=\displaystyle\sum_{p=1}^{n-1}\frac{1}{p^2(n-p)^2}$.

****Exercice 22** Montrer que la série de terme général $(n+1)2^{-n}$ converge puis déterminer sa somme.

♡* **Exercice 23** Soit $u_n=\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $u_0=0$.

1. La série $\sum u_n$ est-elle absolument convergente ?
2. On considère le produit de cauchy de cette série par elle-même, c'est à dire la série de terme général $v_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}u_ku_{n-k}$.

   Montrer $\sum v_n$ est divergente. (On pourra être amené à étudier la fonction f définie par $f(x)=x(n-x)$.)

♡* **Exercice 24** **Démonstration de la formule de Stirling.**

1. Dans cette question, on veut prouver l'existence d'un réel $K > 0$, tel que $n! \sim K\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.

   On note $a_n = \dfrac{e^n n!}{\sqrt{n}n^n}$ et $u_n = \ln(a_{n+1}) - \ln(a_n)$

   (a) Montrer que la série $\sum u_n$ converge.

   (b) Conclure.

2. Dans cette question, on va déterminer la valeur exacte de la constante K, à l'aide des intégrales

$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^n dt.$$

   (a) Calculer I_0 et I_1. A l'aide d'une IPP, déterminer une relation entre I_{n+2} et I_{n+1}.
   En déduire les expressions de I_{2p} et I_{2p+1} (on donnera les résultats avec des factorielles).

   (b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et que $I_{n+1} \sim I_n$.

   (c) Montrer que la suite $(n+1)I_nI_{n+1}$ est constante. En déduire un équivalent de I_n.

   (d) Déterminer la valeur de la constante K.

Exercices issus de la banque CCINP

Analyse, exercice 5

1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

   (a) **Cas** $\alpha \leqslant 0$: En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.

   (b) **Cas** $\alpha > 0$: Étudier la nature de la série.

   Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.

2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2+n))^2}$.

Analyse, exercice 6 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et l un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, alors la série $\sum u_n$ converge. **Indication** : écrire, judicieusement, la définition de $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = l$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.

2. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$?

Analyse, exercice 7

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs.
   On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont non nulles à partir d'un certain rang.
   Montrer que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature..

2. Etudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{((-1)^n + \mathrm{i})\ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)}$.

   Remarque : i désigne le nombre complexe de carré égal à -1.

Analyse, exercice 46 On considère la série : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\dfrac{\pi}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.

2. En déduire que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.

3. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?