Programme de colle. Semaine n°21 : du 31/03 au 04/04/2025.

I : Dérivabilité des fonctions vectorielles : voir le programme précédent

III : Fonctions de plusieurs variables : calcul différentiel

a) Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$: voir le programme précédent.
b) Règle de la chaîne : voir le programme précédent.
c) Gradient : voir le programme précédent.

d) Fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ Dérivées partielles d'ordre 2 d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Notations $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$. Fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$.
Théorème de Schwarz (admis).
Matrice hessienne en un point a d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Notation $H_f(a)$.

Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 (admise) : si $h = (h_1, \cdots, h_p)$ et $X = \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix}$ alors

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \langle \nabla f(a), h \rangle + \frac{1}{2} X^T H_f(a) X + \mathrm{o}(\|h\|^2)$$

Expression en termes de produit scalaire.
e) Extrema d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$
Extremum local, global.
Point critique d'une application de classe $\mathscr{C}^1$.
Si une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ admet un extremum local en un point a, alors a est un point critique.
Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et a un point critique de f :

- Si $H_f(a) \in \mathscr{S}_p^{++}(\mathbb{R})$, alors f atteint en a un minimum local strict.
- Si $-H_f(a) \in \mathscr{S}_p^{++}(\mathbb{R})$, alors f atteint en a un maximum local strict.
- Si $H_f(a) \notin \mathscr{S}_p^{+}(\mathbb{R})$, alors f n'admet pas de minimum en a.
- Si $-H_f(a) \notin \mathscr{S}_p^{+}(\mathbb{R})$, alors f n'admet pas de maximum en a.

Autre formulation : sous les mêmes hypothèses, alors :

- si les valeurs propres de $H_f(a)$ sont strictement positives, alors f admet en a un minimum local strict.
- si les valeurs propres de $H_f(a)$ sont strictement négatives, alors f admet en a un maximum local strict.
- si $p = 2$ et $H_f(a)$ admet deux valeurs propres non nulles de signes opposés, alors f n'admet pas d'extremum en a (point selle ou "col")

Dans les autres cas, la matrice Hessienne ne permet pas de conclure.
Explicitation pour $p = 2$ (trace et déterminant).
Exemples de recherche d'extremums globaux sur une partie de $\mathbb{R}^p$.

IV : Questions de cours

- Dérivées partielles d'ordre 1, fonctions de classe C^1. Definitions
- Théorème fondamental (existence du dl (ordre 1) pour une fonction de classe C^1. énoncé
- Le caractère C^1 entraine la continuité (dem)
- Différentielle en un point : définition et propriétés (énoncé)
- Règle de la chaine (énoncé)
- Caractérisation des fonctions constantes sur un convexe (dem)
- Gradient définition et propriétés (enoncé)
- Théorème de Schwarz (énoncé)
- Formule de Taylor Young (ordre 2) énoncé
- Utilisation du gradient et de la Hessienne pour trouver des extrema locaux (énoncé).