

1 Probabilités

Exercice 1 Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et p et q deux réels de l'intervalle $]0, 1[$ avec $p + q < 1$. On jette n fois un dé pipé dont les 6 faces ne comportent que les nombres 1, 2 et 3 et on suppose les lancers indépendants. A chaque lancer, la probabilité d'obtenir 1 est p , celle d'obtenir 2 est q et celle d'obtenir 3 est $r = 1 - (p + q)$. On appelle X (respectivement Y) la variable aléatoire égale au nombre de 1 (respectivement de 2) obtenus en n lancers.

1. (a) Quelles sont les lois respectives de X et de Y ?
- (b) Déterminer la loi du couple (X, Y) .
- (c) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. On suppose dans cette question que le nombre de lancers effectués avec ce dé est une variable aléatoire N suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
 - (a) Déterminer les lois respectives de X et de Y .
 - (b) Vérifier que X et Y sont indépendantes.

Exercice 2 Dans tout l'exercice, on se place dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Si X est une variable aléatoire entière et positive sur cet espace, on notera G_X la fonction génératrice de X .

Question préliminaire : rappeler la définition de G_X ainsi que son rayon de convergence. La fonction G_X caractérise-t-elle la loi de X ? Justifier que : si X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ et si (a_n) est une suite de réels positifs tels que, pour tout $t \in [0, 1[$, $G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \mathbb{P}(X = n)$.

Soient $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires, mutuellement indépendantes, de même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$, et T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante des précédentes. $(T, X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes.

On note G_X la fonction génératrice commune à toutes les X_n .

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \Omega$, on pose $S_n(\omega) = \sum_{k=1}^n X_k(\omega)$ et $S_0(\omega) = 0$, puis $S(\omega) = S_{T(\omega)}(\omega)$.

Partie A On souhaite démontrer l'égalité $G_S = G_T \circ G_X$.

1. Montrer que, si X et Y sont deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendantes, alors $G_{X+Y} = G_X G_Y$.
2. En admettant que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, S_k est indépendante de X_{k+1} , prouver que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$G_{S_k} = (G_X)^k.$$

3. En admettant que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T et S_n sont indépendantes, montrer que

$$\forall t \in [-1, 1], \forall K \in \mathbb{N}, G_S(t) = \sum_{k=0}^K G_X(t)^k \mathbb{P}(T = k) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = n) \mathbb{P}(T = k) t^n \right)$$

4. Pour $K \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 1[$, on pose $R_K = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = n) \mathbb{P}(T = k) t^n \right)$.

$$\text{Montrer que : } 0 \leq R_K \leq \frac{1}{1-t} \sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbb{P}(T = k).$$

5. Conclure.

Partie B En déduire que, si T et les X_n sont d'espérance finie, alors S aussi et $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(T)\mathbb{E}(X_1)$.

Partie C Lors d'une ponte, un insecte pond un nombre aléatoire d'oeufs suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Ensuite, la probabilité qu'un oeuf donné devienne un nouvel insecte est $\alpha \in]0, 1[$.

1. Rappeler la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre λ .
2. En utilisant la relation de composition ci-dessus, déterminer la loi du nombre d'insectes issus de la ponte.

2 Algèbre

Exercice 3 Cet exercice se compose de 2 parties indépendantes entre elles.

Si n est un entier, on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. On note I_n la matrice identité de cet ensemble.

Si A est une matrice, on note tA sa transposée. $Tr(A)$ désigne la trace de A .

On identifie dans tout ce problème $\mathbb{R}^n$ avec l'ensemble des matrices colonnes à n lignes.

Si E et F sont deux espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires de E dans F . On note E^* l'espace $\mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ des formes linéaires sur E .

Dans tout l'exercice, pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on considère l'application suivante :

$$\begin{aligned} \phi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M &\mapsto AM \end{aligned}$$

Questions préliminaires.

1. Vérifier que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, l'application ϕ_A est linéaire.
2. Donner la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et celle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^*$.
3. Énoncer le théorème de la base incomplète.

Partie I. Un exemple.

Dans cette partie, on pose : $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. La matrice B est-elle diagonalisable ? Si oui, préciser une base de vecteurs propres.
3. On pose

$$E_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (a) Vérifier que la famille $\mathcal{E} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
- (b) Calculer $\phi_A(E_{ij})$ pour tout $1 \leq i, j \leq 2$.
- (c) Donner la matrice de ϕ_A dans la base $\mathcal{E}$.
- (d) L'endomorphisme ϕ_A est-il diagonalisable ? Si oui, préciser ses valeurs propres et une base de vecteurs propres de ϕ_A (on rappelle qu'ici, un vecteur propre sera une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$).

Partie II. Réduction de l'endomorphisme ϕ_A

On se fixe maintenant $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel qu'il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle vérifiant $\phi_A(M) = \lambda M$.
Montrer que la matrice $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible.
2. Montrer que si λ est une valeur propre de ϕ_A , c'est également une valeur propre de A .
3. Soit μ une valeur propre de A , X un vecteur colonne non nul tel que $AX = \mu X$.
Soit M une matrice dont une colonne est égale à X et toutes les autres colonnes sont nulles. Montrer que M est un vecteur propre de ϕ_A .
4. Donner l'ensemble des valeurs propres de ϕ_A .
5. Montrer que si A est diagonalisable, ϕ_A l'est également (on pourra à partir d'une base de vecteurs propres de A construire une base de vecteurs propres de ϕ_A).

Exercice 4 (inspiré de E3A PC 2013 et CCP PC 2009) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on donne/rappelle les notations suivantes :

- $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices réelles carrées d'ordre n et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles avec n lignes et une colonne.
- $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, I_n désigne la matrice identité d'ordre n .
- $\mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices orthogonales de taille n .
- $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n .
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\text{Sp}(A)$ désigne l'ensemble des valeurs propres réelles de A et tA la transposée de A .
- 0 désigne selon le contexte soit le réel nul, soit la matrice nulle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, soit encore la matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- $\mathbb{R}^n$ sera identifié à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Lorsque $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne canonique, $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique : $\|X\|^2 = {}^tXX$

Par ailleurs on introduit notions suivantes :

- $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices réelles triangulaires supérieures à coefficients diagonaux strictement positifs.
- Une matrice symétrique réelle $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est dite positive si : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXSX \geq 0$ et définie positive si : $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, {}^tXSX > 0$.
On note $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ positives et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ définies positives.

1. Enoncer le théorème spectral (théorème "fondamental" pour les matrices symétriques réelles).
2. Enoncer précisément le théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.
3. Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que S appartient à $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$) si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives (respectivement strictement positives).

4. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ est symétrique positive. Est-elle définie positive ?

5. Soit la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Est-elle symétrique définie positive ?

6. On considère **dans question uniquement**, la matrice $S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

- (a) Déterminer $P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ et $D =$ diagonale, telles que :

$${}^tPSP = D, \det(P) = 1 \text{ et } D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \text{ où } \underline{\alpha < \beta < \gamma}$$

puis justifier que $S \in \mathcal{S}_3^{++}(\mathbb{R})$.

- (b) Démontrer qu'il existe une unique matrice $T \in \mathcal{T}_3^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tTT$.

On explicitera la matrice T .

7. On considère $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$; montrer que

$$\varphi_S : \begin{cases} \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \rightarrow \mathbb{R} \\ (X, Y) & \mapsto {}^tXSX \end{cases} \text{ est un produit scalaire sur } \mathbb{R}^n.$$

8. Montrer que : pour $n = 2$, $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$, c'est à dire : est inclus dans $\mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$, contient l'identité, est stable par multiplication et passage à l'inverse.

On admettra que cette proposition reste vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

9. Une caractérisation des matrices symétriques réelles définies positives.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on pose $B = {}^tAA$.

(a) Montrer que $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

(b) Montrer que : si $\lambda \in \text{Sp}((B))$ et $x \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre de B associé à λ , alors

$$\|Ax\|^2 = \lambda\|x\|^2 \text{ et en déduire que } \lambda \in [0, +\infty[.$$

(c) En déduire que : $A \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{R})$ si, et seulement si, $B \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

10. Le but de cette question est de démontrer le théorème suivant :

$S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ si, et seulement si, il existe une unique matrice $T \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tTT$. Cette décomposition s'appelle décomposition de Cholesky de S .

On considère $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

(a) Montrer que s'il existe $T \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $S = {}^tTT$ alors $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

(b) On suppose qu'il existe T_1, T_2 deux matrices de $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ telles que ${}^tT_1T_1 = {}^tT_2T_2$.

i. Montrer que $\Delta = T_1(T_2)^{-1}$ est une matrice diagonale à coefficients diagonaux strictement positifs.

ii. En déduire, que $\Delta^2 = I_n$.

iii. En déduire que $T_1 = T_2$.

(c) On suppose que $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et on considère φ_S le produit scalaire défini dans la question 7.

Soit $b = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $b' = (v_1, \dots, v_n)$ la base de $\mathbb{R}^n$ obtenue à partir de b en utilisant le théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt **pour le produit scalaire** φ_S .

On note T la matrice de passage de la base b' à la base b .

i. Montrer que $T \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$

ii. Montrer que $S = {}^tTT$.

3 Analyse

Exercice 5 Soit $\lambda > 0$ et (u_n) la suite définie par ; $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{(-1)^n}{\lambda n + 1}$.

1. La série $\sum u_n$ est-elle absolument convergente ?

2. Vérifier que pour tout entier $n, u_n = (-1)^n \int_0^1 t^{\lambda n} dt$.

3. Montrer que la série de terme général u_n converge et que $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\lambda}$

4. En déduire les valeurs de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ et de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Justifier que la série de terme général $a_n = \frac{1}{(n+1)(2n+1)}$ converge puis calculer sa somme.

Exercice 6 (extrait de E3A PC 1 2015)

1. (a) Rappeler la définition de la fonction Arctan, ainsi que son tableau de variations et sa dérivée. Justifier que pour tout réel x , on a : $|\text{Arctan}(x)| \leq |x|$.

(b) Etudier et représenter la fonction $g :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[, \quad g(x) = \text{Arctan}(\tan(x))$$

(c) Pour $x > 0$, soit $\psi(x) = \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$. Calculer la dérivée $\psi'(x)$.

En déduire une relation entre $\text{Arctan}(x)$ et $\text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x > 0$.

(d) Déterminer le développement en série entière de la fonction Arctan sur $] -1, 1[$.

2. On considère la fonction h définie par $h(0) = 1$ et pour tout réel $x \neq 0, h(x) = \frac{\text{Arctan}(x)}{x}$.

- (a) Justifier que pour tout $x \in]-1, 1[$, on a : $h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k+1)}$.
- (b) Justifier que h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
3. Soit $H(x) = \int_0^x \frac{\text{Arctan}(t)}{t} dt$ pour $x \in \mathbb{R}$.
- (a) Montrer que H est bien définie et est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$; préciser H' .
- (b) Trouver une relation entre $H(x)$ et $G(x) = H\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x > 0$.
- (c) Soit $f(x) = \frac{H(x)}{x}$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 1$.
Montrer que f est développable en série entière sur $] -1, 1[$ et est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
- (d) Donner une relation entre $f(x)$ et $f\left(\frac{1}{x}\right)$ pour $x > 0$.
4. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose : $\phi(x) = \int_0^\infty \frac{\text{Arctan}(tx)}{t(t^2+1)} dt$.
- (a) Montrer que ϕ est définie sur $\mathbb{R}$ et impaire.
- (b) Montrer que ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
- (c) Déterminer $\phi'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}^+$ (avec une expression sans intégrale, si $x \neq 1$ puis $x = 1$). Pour cela, on pourra utiliser la relation :

$$\forall t \in \mathbb{R}^+, \frac{1}{(1+t^2)(1+x^2t^2)} = \frac{1}{1-x^2} \left(\frac{1}{1+t^2} - \frac{x^2}{1+x^2t^2} \right).$$

En déduire la valeur de $\phi(x)$ pour tout réel x .

- (d) Si $x \in \mathbb{R}$, justifier l'existence et calculer $K(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\text{Arctan}(x \tan(\theta))}{\tan(\theta)} d\theta$.

4 Algèbre et Analyse

Exercice 7 On note E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de fonctions continues sur $[0, +\infty[$ et qui s'annulent en 0. Pour toute fonction f de E , on définit sur $[0, +\infty[$ la fonction $T(f)$ par

$$\forall x \in]0, +\infty[, T(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt \text{ et } T(f)(0) = 0$$

- Soit $f \in E$. Montrer que $T(f) \in E$.
- Etablir que l'application $T : E \rightarrow E, f \mapsto T(f)$ est un endomorphisme injectif de E .
- Soit λ un réel non nul. On considère l'équation différentielle

$$\lambda xy' + (\lambda - 1)y = 0.$$

- Déterminer la solution générale de (E_λ) sur $]0, +\infty[$.
- Déterminer les réels λ tels que les solutions de (E_λ) sur $]0, +\infty[$ admettent toutes une limite nulle en 0.
- Déterminer les éléments propres de T .

5 Algèbre et probabilités

Exercice 8 (extrait de E3A PSI 2018 mathématiques 1)

On rappelle que pour deux entiers naturels r et ℓ , $\binom{r}{\ell}$ désigne le nombre de parties à ℓ éléments d'un ensemble à r éléments.

Soient n un entier naturel non nul et X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et prenant leurs valeurs dans $\llbracket 1; n+1 \rrbracket$. On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1; n+1 \rrbracket^2, \quad \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \alpha \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}$$

1. Montrer de deux manières différentes que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.
2. Déterminer la valeur du réel α .
3. Donner les lois des variables aléatoires X et Y . Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?
4. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Z = X - 1$. Donner alors l'espérance et la variance de X .
5. Soient p , q et r trois entiers naturels et A un ensemble fini de cardinal $p + q$.

En **dénombrant de deux façons différentes** les parties de A de cardinal r , montrer que l'on a :

$$\sum_{k=0}^r \binom{p}{k} \binom{q}{r-k} = \binom{p+q}{r}$$

On pourra remarquer que $k + (r - k) = r$ et s'aider d'un schéma illustrant cette situation.

6. En déduire la valeur de : $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$.
7. On note $B \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est

$$b_{i,j} = \mathbb{P}([(X, Y) = (i, j)]).$$

- (a) Déterminer le rang de la matrice B .
- (b) Déterminer la valeur de $\text{Tr}(B)$, la trace de la matrice B .