1 Probabilités

Exercice 1

1. (a) X compte le nombre de succès dans une succession de n épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p, donc $\boxed{X \sim \mathcal{B}(n,p).}$ De même $\boxed{Y \sim \mathcal{B}(n,p).}$

   (b) $P(X = i, Y = j)$ est la probabilité de l'union (disjointe) de toutes les successions de n lancers possibles amenant i fois 1 et j fois 2. Chacun de ces lancers est de probabilité $p^i q^j r^{n-(i+j)}$.

   Remarquons tout d'abord que, $\boxed{\text{pour } i+n > n,\ P(X=i,Y=j)=0.}$

   Supposons que $i + j \leqslant n$. Comptons maintenant le nombre de telles successions de lancers. On choisit d'abord la place des 1 : on a $\binom{n}{i}$ choix. Puis, pour chacun de ces choix, on a $\binom{n-i}{j}$ manière de choisir les places de 2. Et ensuite les autres lancers sont des 3. Donc :

   $$\boxed{\text{pour } i+j \leqslant n,\quad P(X=i,Y=j) = \binom{n}{i}\binom{n-i}{j} p^i q^j r^{n-(i+j)} = \frac{n!}{i!\,j!\,(n-(i+j))!} p^i q^j r^{n-(i+j)}.}$$

   (c) $P(X = n, Y = n) = 0$ et $P(X = n) \times P(Y = n) \neq 0$ donc $\boxed{X \text{ et } Y \text{ ne sont pas indépendantes.}}$

2. (a) $\boxed{X(\Omega) = \mathbb{N}}$ (comme le nombre de lancers peut valoir n'importe quel entier naturel non nul, le nombre de 1 obtenus peut valoir n'importe quel entier naturel). Puis d'après la formule des probabilités totales appliquée avec le système complet d'événements $(N = n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :

   $$\begin{aligned} P(X=i) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)P_{n=n}(X=i) = \sum_{n=i}^{\infty} e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}\binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i} \\ &= \frac{(p\lambda)^i}{i!}e^{-\lambda}\sum_{n=i\infty}\frac{(\lambda(1-p))^{n-i}}{(n-i)!} = \frac{(p\lambda)^i}{i!}e^{-\lambda}e^{\lambda(1-p)} = \frac{(p\lambda)^i}{i!}e^{-\lambda p} \end{aligned}$$

   $\boxed{\text{Donc } X \sim \mathcal{P}(\lambda p).}$ Par un calcul analogue : $\boxed{Y \sim \mathcal{P}(\lambda q).}$

   (b) De la même manière, en appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(N = n)_{n\in\mathbb{N}}$, on a :

   $$\begin{aligned} P(X=i,Y=j) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N=n)P_{N=n}(X=i,Y=j) \\ &= \sum_{n=i+j}^{\infty}\binom{n}{i}\binom{n-i}{j}p^i q^j r^{n-(i+j)} = \frac{n!}{i!\,j!\,(n-(i+j))!}p^i q^j r^{n-(i+j)} \text{ (question 1b)} \\ &= \frac{(p\lambda)^i\,(q\lambda)^j}{i!\,j!}e^{-\lambda}\sum_{n=i+j}^{\infty}\frac{r^{(n-(i+j))}}{(n-(i+j))!} = \frac{(p\lambda)^i}{i!}\frac{(q\lambda)^j}{j!}e^{-\lambda}e^{r} \\ &= \frac{(p\lambda)^i}{i!}e^{-p\lambda}\frac{(q\lambda)^j}{j!}e^{-q\lambda} = P(X=i)P(Y=j) \text{ car } r = 1-(p+q) \end{aligned}$$

   $\boxed{\text{Donc } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes.}}$

Exercice 2 (Extrait de Partie II de Centrale PSI 2015) **Formule de Wald**

A

1. Les variables X et Y étant indépendantes, pour toute fonction f les variables $f(X)$ et $f(X)$ le sont et on a donc, sous réserve que les espérances existent $\mathbb{E}(f(X)f(Y)) = \mathbb{E}(f(X))\mathbb{E}(f(Y))$. Avec la fonction $x \in \mathbb{N} \mapsto t^x$ (pour un réel quelconque t fixé dans $[-1, 1]$), on obtient (le cours nous indique que les espérances existent toutes)
$$G_{X+Y}(t) = \mathbb{E}(t^X t^Y) = \mathbb{E}(t^X)\mathbb{E}(t^Y) = G_X(t)G_Y(t)$$

2. Montrons par récurrence que la propriété « $G_{S_k} = (G_X)^k$ »est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   - Initialisation : l'hypothèse est immédiatement vraie au rang 1.
   - Hérédité : soit $k \geq 1$ tel que l'hypothèse soit vraie aux rangs $1, \dots, k$. D'après la question précédente (et le résultat d'indépendance admis) la fonction génératrice de $X_1 + \cdots + X_k + X_{k+1} = S_k + X_{k+1}$ est $G_{S_k} G_X$. En utilisant l'hypothèse de récurrence, elle vaut $(G_X)^{k+1}$.

   La propriété est aussi vraie au rang 0 puisque $G_{S_0} = 1$ (S_0 étant constante égale à 0) et que $(G_X)^0 = 1$.

3. $(T = k)_{k\in\mathbb{N}}$ étant un système complet d'événements, on a
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}(S = n) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}((S = n) \cap (T = k))$$
On en déduit que
$$\forall t \in [-1, 1],\ G_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(S = n)t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}((S = n) \cap (T = k))t^n \right)$$
Comme on a l'égalité des événements $(S = n) \cap (T = k)$ et $(S_k = n) \cap (T = k)$ et comme S_k et T sont admis indépendants, on a alors
$$\forall t \in [-1, 1],\ G_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = n)\mathbb{P}(T = k)t^n \right)$$
On fixe $K \in \mathbb{N}$. On peut découper la somme intérieure en deux :
$$\forall t \in [-1, 1],\ G_S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{K} \mathbb{P}(S_k = n)\mathbb{P}(T = k)t^n + \sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = n)\mathbb{P}(T = k)t^n \right)$$
Pour écrire $\sum_{n=0}^{\infty}(U_n + V_n) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n + \sum_{n=0}^{\infty} V_n$, il nous suffit (sachant que le membre de gauche existe) de montrer que l'un des deux termes du membre de droite existe (l'autre existera alors fatalement). On écrit (ici on a des sommes finies et donc pas de problème)
$$\sum_{n=0}^{N}\sum_{k=0}^{K} \mathbb{P}(S_k = n)\mathbb{P}(T = k)t^n = \sum_{k=0}^{K} \left(\sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(S_k = n)t^n \right) \mathbb{P}(T = k)$$
$\sum_{n=0}^{N} \mathbb{P}(S_k = n)t^n$ est le terme général d'une suite convergente de limite
$G_S(t) = G_X(t)^k$. On a donc convergence ci-dessus (somme d'un nombre constant de suite convergente) et
$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{K} \mathbb{P}(S_k = n)\mathbb{P}(T = k)t^n = \sum_{k=0}^{K} G_X(t)^k \mathbb{P}(T = k)$$
Avec tous ces arguments, on peut finalement écrire
$$\forall t \in [-1, 1],\ G_S(t) = \sum_{k=0}^{K} G_X(t)^k \mathbb{P}(T = k) + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = n)\mathbb{P}(T = k)t^n \right)$$
Remarque : la formule est valable pour $t \in [-1, 1]$ et pas seulement $t \in [0, 1]$.

4. On prend $t \in [0, 1]$ et $K \in \mathbb{N}$. On a
$$\forall k \geq K + 1,\ \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \mathbb{P}(S_k = n)\mathbb{P}(T = k)t^n \leq \mathbb{P}(T = k)t^n$$

Comme $\sum(\mathbb{P}(T = k))$ converge (série positive de somme 1) on peut sommer pour $k \geq K$ et obtenir

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq \sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbb{P}(S_k = n)\mathbb{P}(T = k)t^n \leq \left(\sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbb{P}(T = k)\right) t^n$$

Comme $t \in [0, 1[$, $\sum(t^n)$ converge et sa somme vaut $\dfrac{1}{1+t}$. On en déduit que

$$0 \leq R_K \leq \frac{1}{1-t} \sum_{k=K+1}^{\infty} \mathbb{P}(T = k)$$

5. A $t \in [0, 1[$ fixé, la question précédente montre que $R_K \to 0$ quand $K \to +\infty$. On peut ainsi faire tendre K vers $+\infty$ dans **II.A.3** pour obtenir

$$G_S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} G_X(t)^k \mathbb{P}(T = k) = G_T(G_X(t)) = G_T \circ G_X(t)$$

Ceci n'est prouvé que pour $t \in [0, 1]$ mais le résultat prouvé en préliminaire indique que cela suffit pour conclure que

$$G_S = G_T \circ G_X$$

B Si Y est une variable d'espérance finie, on a $\mathbb{E}(Y) = G'_Y(1)$. Ici, en supposant que les espérances existent, on a (puisque $G_X(1) = 1$)

$$\mathbb{E}(S) = G'_S(1) = G'_T(G_X(1)).G'_X(1) = \mathbb{E}(T)\mathbb{E}(X_1)$$

C

1. Si $Y \sim \mathcal{P}(\lambda)$ alors pour tout n, $\mathbb{P}[Y = n] = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^n}{n!}$ et

$$\forall t \in [-1, 1],\ G_Y(t) = e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda t}$$

2. Ici, $T \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $\forall i,\ X_i \sim \mathcal{B}(\alpha)$. S est alors le nombre d'insectes issus de la ponte. On a

$$\forall t \in [-1, 1],\ G_S(t) = G_T(G_X(t)) = G_T(1 - \alpha + \alpha t) = e^{-\lambda\alpha} e^{\lambda\alpha t}$$

et on conclut que $\boxed{S \sim \mathcal{P}(\lambda\alpha)}$

2 Algèbre

Exercice 3 Questions préliminaires

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Pour tous $(M,N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}
\phi_A(\lambda.M+N) &= A(\lambda.M+N)\\
&= \lambda.AM + AN \quad \text{(distributivité dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))\\
&= \lambda.\phi_A(M) + \phi_A(N)\\
\tau_A(\lambda.M+N) &= \operatorname{Tr}\big(A(\lambda.M+N)\big)\\
&= \operatorname{Tr}\big(\lambda.AM+AN\big) \quad \text{(distributivité dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))\\
&= \lambda.\operatorname{Tr}(AM) + \operatorname{Tr}(AN) \quad \text{(linéarité de l'application trace)}\\
&= \lambda.\tau_A(M) + \tau_A(N)\\
\gamma_A(\lambda.M+N) &= A(\lambda.M+N) - (\lambda.M+N)A\\
&= \lambda.AM + AN - \big(\lambda.MA + NA\big) \quad \text{(distributivité à gauche et à droite dans } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}))\\
&= \lambda.(AM-MA) + (AN-NA)\\
&= \lambda.\gamma_A(M) + \gamma_A(N).
\end{aligned}$$

   Donc $\boxed{\text{les applications } \phi_A,\ \tau_A \text{ et } \gamma_A \text{ sont linéaires.}}$

2. Le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\boxed{\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ est de dimension } n^2.}$
   Si E et F sont deux espaces vectoriels, sur un même corps K, de dimensions finies alors $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension $\dim E \times \dim F$. En particulier, on en déduit que $\mathcal{L}(E,K)$ est de dimension $\dim E$ donc : $\boxed{\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^* = n^2}$.

3. Si E est un espace vectoriel de dimension finie n et si $(e_1,\dots,e_k)$ est une famille libre de E alors il existe des vecteurs $e_{k+1},\dots,e_n$ de E tels que $(e_1,\dots,e_k,e_{k+1},\dots,e_n)$ soit une base de E.

Partie I : un exemple

1. La matrice A est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux : 1 et 2.
   Puisque $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admet deux valeurs propres distinctes, $\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$

2. Le polynôme caractéristique de la matrice B est $(X-1)^2(X-2)^2$.
   On en déduit que les valeurs propres sont 1 et 2 et les sous-espaces propres correspondants sont de dimension au plus 2.
   Tout d'abord, on remarque :

$$\begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&0&3\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&0&3\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

   donc $(1,0,0,0)$ et $(0,1,0,0)$ sont deux vecteurs du sous-espace propre E_1 associé à la valeur propre 1. De plus ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels donc forment une famille libre et on a vu que E_1 est de dimension au plus 2 donc :

$$E_1 = \operatorname{Vect}\big((1,0,0,0),(0,1,0,0)\big).$$

   D'autre part, soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$, on note E_2 le sous-espace propre associé à la valeur propre 2 alors :

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t) \in E_2 &\iff \begin{pmatrix}1&0&3&0\\0&1&0&3\\0&0&2&0\\0&0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t\\y\\z\\t\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}t\\y\\z\\t\end{pmatrix}\\
&\iff \begin{cases} x+3z = 2x\\ y+3t = 2y\\ 2z = 2z\\ 2t = 2t\end{cases}\\
&\iff x = 3z \text{ et } y = 3t\\
&\iff (x,y,z,t) = (3z,3t,z,t)\\
&\iff (x,y,z,t) = z.(3,0,1,0) + t.(0,3,0,1)\\
&\iff (x,y,z,t) \in \operatorname{Vect}\big((3,0,1,0),(0,3,0,1)\big).
\end{aligned}$$

De plus, les vecteurs $(3,0,1,0)$ et $(0,3,0,1)$ ne sont pas proportionnels donc forment une famille libre donc ils forment une base de :

$$E_2 = \text{Vect}\big((3,0,1,0),(0,3,0,1)\big).$$

Les calculs précédents montrent que E_1 et E_2 sont tous deux de dimension 2 ce qui correspond à la multiplicité de la valeur propre correspondante donc $\boxed{B \text{ est diagonalisable}}$ est une base de vecteurs propres est constituée par les vecteurs :

$$\boxed{(1,0,0,0)\ ,\ (0,1,0,0)\ ,(3,0,1,0) \text{ et } (0,3,0,1).}$$

3. (a) On a :

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) &\iff \exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \ / \ M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\
&\iff \exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \ / \ M = a.\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b.\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d.\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&\iff \exists (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4 \ / \ M = a.E_{11} + b.E_{12} + cE_{21} + d.E_{22} \\
&\iff M \in \text{Vect}(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})
\end{aligned}$$

ce qui signifie que $\mathcal{E} = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ est une famille génératrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ or cette famille contient 4 éléments et $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension 4 donc cette famille génératrice est également libre donc c'est $\boxed{\text{une base de } \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).}$

(b) On a :

- $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{\phi_A(E_{11}) = E_{11}}$.
- $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{\phi_A(E_{12}) = E_{12}}$.
- $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{\phi_A(E_{21}) = 3E_{11} + 2E_{21}}$.
- $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{\phi_A(E_{22}) = 3E_{12} + 2E_{22}}$.

(c) Les relations précédentes montrent que $\boxed{B \text{ est la matrice de } \phi_A \text{ dans la base } \mathcal{E}.}$

(d) D'après les questions I.2 et I.3.c, $\boxed{\phi_A \text{ est diagonalisable.}}$
Une base de vecteurs propres de B est constituée par les vecteurs :

$$(1,0,0,0)\ ,\ (0,1,0,0)\ ,(3,0,1,0) \text{ et } (0,3,0,1)$$

donc une base de vecteurs propres de ϕ_A est constituée par les matrices :

$$\boxed{E_{11}\ ,\ E_{12}\ ,\ 3E_{11} + E_{12} \text{ et } 3E_{12} + E_{22}.}$$

Partie II : réduction de l'endomorphisme ϕ_A

1. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $\phi_A(M) = \lambda M$ ce qui signifie $AM = \lambda M$ puis $(A - \lambda\, \mathrm{I}_n)M = 0_n$.
Si la matrice $A - \lambda\, \mathrm{I}_n$ était inversible alors on en déduirait :

$$(A - \lambda\, \mathrm{I}_n)^{-1}(A - \lambda\, \mathrm{I}_n)M = 0_n \ \text{ donc } \ M = 0_n$$

ce qui contredit l'hypothèse M non nulle.
Donc $\boxed{\text{la matrice } A - \lambda\, \mathrm{I}_n \text{ n'est pas inversible.}}$

2. Si λ est une valeur propre de ϕ_A alors il existe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $\phi_A(M) = \lambda M$.
D'après la question précédente, on en déduit que la matrice $A - \lambda\, \mathrm{I}_n$ n'est pas inversible donc que $\boxed{\lambda \text{ est une valeur propre de } A.}$

3. Supposons que M soit la matrice dont la k^{e} colonne est X et toutes les autres sont nulles, on note $C_1, \ldots, C_n$ lesdites colonnes alors les colonnes de la matrice AM sont $AC_1, \ldots, AC_n$.
Si $i \neq k$ alors le produit AC_i est la colonne nulle.
Sinon, on a $AC_k = AX$ donc $AC_k = \mu X$.
Donc AM est la matrice dont la k^{e} colonne est μX et toutes les autres sont nulles donc $AM = \mu M$.
On a $\phi_A(M) = \mu M$ et M est non nulle (puisque X est non nulle)
donc $\boxed{M \text{ est un vecteur propre de } \phi_A.}$

4. D'après la question II.2, une valeur propre de ϕ_A est une valeur propre de A.
   D'après la question II.3, une valeur propre de A est une valeur propre de ϕ_A.
   On en déduit que $\boxed{\text{les valeurs propres de } \phi_A \text{ sont celles de } A.}$
5. On suppose A diagonalisable alors A admet une base de vecteurs propres correspondant à des vecteurs colonnes $X_1, \ldots, X_n$.
   Pour tous $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, n]\!]$, on note $M_{i,j}$ la matrice dont la j^{e} colonne est X_i et dont toutes autres colonnes sont nulles.
   D'après la question II.3, les matrices $M_{i,j}$ sont des vecteurs propres de ϕ_A.
   De plus, considérons une combinaison linéaire nulle des matrices précédentes :
   $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_{i,j} M_{i,j} = 0_n.$$
   En considérant la j^{e} colonne, on peut écrire :
   $$\sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} X_i = 0_{n,1}$$
   or $(X_1, \ldots, X_n)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $\lambda_{1,j}, \ldots, \lambda_{n,j}$ sont tous nuls.
   Puisque j est quelconque entre 1 et n, on en déduit que tous les $\lambda_{i,j}$ sont nuls *i.e.* la famille des matrices $M_{i,j}$ est libre or elle contient n^2 vecteurs ce qui correspond à la dimension de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc c'est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   Ainsi, ϕ_A admet une base de vecteurs propres donc $\boxed{\phi_A \text{ est diagonalisable.}}$

Exercice 4 (inspiré de E3A PC 2013 et CCP PC 2009)

1. Si A est une matrice symétrique réelle de taille n, alors A est diagonalisable. De plus il existe alors une matrice P orthogonal et une matrice D diagonale telles que $P^{-1}AP = {}^tPAP = D$.

2. Soit $(\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_n})$ une famille libre de E.
Alors il existe une unique famille orthonormale $(\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_n})$ telle que :

$$\forall k = 1 \cdots n, \begin{cases} \text{vect}(\overrightarrow{e_1}, \cdots, \overrightarrow{e_k}) = \text{vect}(\overrightarrow{v_1}, \cdots, \overrightarrow{v_k}) \\ \langle \overrightarrow{e_k}, \overrightarrow{v_k} \rangle > 0 \end{cases}$$

N.B. : on peut ajouter la formule : $e_{k+1} = \dfrac{v_{k+1} - \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \langle \overrightarrow{e_j}, \overrightarrow{v_{k+1}} \rangle \overrightarrow{e_j}}{\left\| v_{k+1} - \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \langle \overrightarrow{e_j}, \overrightarrow{v_{k+1}} \rangle \overrightarrow{e_j} \right\|}$

3. **Soit** $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$**.** Soit $\lambda \in$Sp(S)et soit X un vecteur propre de S associé à λ. Ainsi :

$${}^tXSX = {}^tX(\lambda X) = \lambda {}^tXX$$

Supposons que $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Par ailleurs : $S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \Rightarrow {}^tXSX \geqslant 0 \Rightarrow \lambda\, {}^tXX \geqslant 0$. Or $tXX \geqslant 0$. Donc $\lambda \geqslant 0$.
$\boxed{\text{Ainsi : } S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}) \Rightarrow \lambda \geqslant 0.}$
De la même manière : comme X est un vecteur propre, $X \neq 0$ et donc
$S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Rightarrow {}^tXSX > 0 \Rightarrow \lambda\, {}^tXX > 0$. Or $tXX > 0$. Donc $\lambda > 0$.
$\boxed{\text{Ainsi : } S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}) \Rightarrow \lambda > 0.}$
Réciproquement : Supposons que toutes les valeurs propres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ de S sont positives ou nulles.
S étant symétrique réelle, il existe $\exists P \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tPSP = D =$Diag$(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.
Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit $X' = {}^tPX = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$. (ainsi $X = PX'$).
Alors ${}^tXSX = {}^t(PX')SPX' = {}^tX'\, {}^tPSPX' = {}^tX'DX' = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x'_k)^2 \geqslant 0$ car les λ_k sont positifs ou nuls.
$\boxed{\text{Ainsi Sp}(S) \subset \mathbb{R}^+ \Rightarrow S \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}).}$
De même : si les λ_k sont tous strictement positifs, alors ${}^tXSX \geqslant 0$. Par ailleurs $X \neq 0 \Rightarrow X' \neq 0$ car $X = PX' \neq 0$. Et $X' \neq 0 \Rightarrow \exists i \in [\![1\,;\, n]\!],\ x'_i \neq 0$ et donc ${}^tXSX = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lambda_k (x'_k)^2 > 0$.
$\boxed{\text{Ainsi Sp}(S) \subset \mathbb{R}^{+*} \Rightarrow S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R}).}$

4. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice A est bien symétrique réelle. On calcule $\chi_A(x) = ... = x^2 - 3x + 1$. On en déduit que Sp$(A) = \left\{ \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}; \dfrac{3-\sqrt{5}}{2} \right\}$.
Or $3 > \sqrt{5}$ car $9 > 5$. Ainsi les deux valeurs propres de A sont strictement positives, donc d'après la question 3, $\boxed{A \in \mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R}).}$

5. $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. La matrice B est bien symétrique réelle. On calcule son polynôme caractéristique sans difficulté en développant par rapport à la première colonne :

$$\chi_B(x) = (x+1)(x^2 - 3x + 1).$$

On calcule sans peine les racines de $x^2 - 3x + 1$ et on trouve : Sp$(B) = \{-1; 3 + \sqrt{5}; 3 - \sqrt{5}\}$.
Au moins une des valeurs propres de B est strictement négative, donc d'après la question 3,

$$\boxed{B \text{ n'est pas symétrique positive.}}$$

6. $S = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ est bien symétrique réelle.

(a) Le calcul du polynôme caractéristique ne pose pas de difficulté : on développe le déterminant par rapport à la 2e colonne :

$$\chi_S(X) = -\begin{vmatrix} 3-X & 0 & 2 \\ 0 & 2-X & 0 \\ 2 & 0 & 3-X \end{vmatrix} = -(2-X)\left[(3-X)^2-4\right] = (X-1)(X-2)(X-5)$$

On résout sans difficulté le système $SX = X$ et l'on trouve

$\mathrm{Ker}(S-I_3) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\} = \mathrm{Vect}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$.

La deuxième colonne de S nous permet d'affirmer que le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de la matrice, associé à la valeur propre 2. Et les valeurs propres sont toutes de multiplicité 1, donc les sous-espaces propres sont de dimension 1.

Ainsi $\mathrm{Ker}(S-2I_3) = \mathrm{Vect}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.

Enfin S est symétrique réelle, donc les sous-espaces propres sont orthogonaux. Donc le sous-espace propre associé à la valeur propre 5, qui est de dimension 1, est engendré par le produit vectoriel $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\boxed{\text{On pose donc } P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \text{ et l'on a : } {}^tPSP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = D.}$$

$\boxed{S \in \mathcal{S}_3^{++}(\mathbb{R}) \text{ car } S \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R}) \text{ et toutes ses valeurs propres sont strictement positives (cf question 3).}}$

(b) Pour déterminer T, on procède par analyse et synthèse.
— Supposons qu'il existe une matrice $T \in \mathcal{T}_3^{++}$ telle que $S = {}^tTT$ et notons cette matrice :

$$\begin{pmatrix} a & d & f \\ 0 & b & e \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \text{ avec } a > 0, b > 0, c > 0$$

$$\text{On a alors : } S = {}^tTT \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 3 \\ ad = 0 \\ af = 2 \\ d^2 + b^2 = 2 \\ df + be = 0 \\ f^2 + e^2 + c^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \sqrt{3} \\ d = 0 \\ f = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ b = \sqrt{2} \\ e = 0 \\ c = \sqrt{\frac{7}{3}} \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, si } T \text{ existe, elle est unique et vaut : } T = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\frac{7}{3}} \end{pmatrix}$$

— Réciproquement, la matrice T ci dessus est bien un élément de $\mathcal{T}_3^{++}$ et vérifie $S = {}^tTT$ à cause des équivalences établies dans l'analyse.

7. L'application φ_S est bien définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
φ_S est **linéaire par rapport à chacune de ses variables** d'après les régles du produit matriciel et de la transposée.
φ_S est **symétrique** car $\varphi_S(X,Y) = {}^t\varphi_S(Y,X)$ et un réel est égal à sa transposée.
Comme $S \in \mathcal{S}_n^+$ alors pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, ${}^tXSX \geq 0$ et donc φ_S **est positive.**
Comme $S \in \mathcal{S}_n^{++}$ alors pour tout $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{\vec{0}\}$, ${}^tXSX > 0$ et donc φ_S est **définie positive.**
$\boxed{\varphi_S \text{ est donc un produit scalaire sur } \mathbb{R}^n.}$

8. $\mathcal{T}_2^{++}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{GL}_2(\mathbb{R})$. En effet, si $T \in \mathcal{T}_2^{++}(\mathbb{R})$, alors son déterminant est égal au produit des coefficients diagonaux (car T triangulaire). Or ceux-ci sont strictement positifs.
La matrice identité appartient à $\mathcal{T}_2^{++}(\mathbb{R})$, de manière évidente.
Le produit de deux matrices triangulaires est triangulaire....
Soit $T = \begin{pmatrix} a & b \\ & c \end{pmatrix} \in \mathcal{T}_2^{++}(\mathbb{R})$. Calculons son inverse par la méthode du pivot.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 1 & 0 \\ 0 & c & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} a & 0 & 1 & -\frac{b}{c} \\ 0 & c & 0 & 1 \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow L_1 - \frac{b}{c} L_2$$
$$\underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{c} \end{array}\right) \quad L_1 \leftarrow \frac{1}{a} L_1 \text{ et } L_2 \leftarrow \frac{1}{c} L_2$$

Ainsi l'inverse de T est $\begin{pmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ac} \\ 0 & \frac{1}{c} \end{pmatrix}$ c'est bien une matrice triangulaire dont les coefficient diagonaux sont strictement positifs.

9. (a) ${}^tB = {}^t({}^tAA) = {}^tA\,{}^t({}^tA) = B$ donc $\boxed{B \text{ est symétrique.}}$
   (b) Soit $\lambda \in Sp(B)$ et $x \in \mathbb{R}^n$ un vecteur propre associé, on a donc $Bx = \lambda x$. Calculons :
   $$\|Ax\|^2 = (Ax|Ax) = \left(x|{}^tAAx\right) = (x|Bx) = (x|\lambda x) = \lambda\|x\|^2$$
   Comme x est un vecteur propre, il est non nul et $\lambda = \dfrac{\|Ax\|^2}{\|x\|^2} \geqslant 0$.
   (c) On procède par double implication :
   — Si $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R})$ alors ${}^tA$ aussi et donc B aussi par produit.
   Ainsi $0 \notin Sp(B)$ d'où $Sp(B) \subset \mathbb{R}^{+*}$.
   — Réciproquement, si $Sp(B) \subset \mathbb{R}^{+*}$, alors B est inversible. De plus $I_n = B^{-1}B = B^{-1} \cdot {}^tAA$, ce qui assure l'inversibilité de A (car $B^{-1} \cdot {}^tA$ et A sont des matrices carrées)
   On a montré que $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow Sp(B) \subset \mathbb{R}^{+*}$ et, comme $B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, on a le résultat annoncé

10. (a) Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On suppose que $\exists T \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $S = {}^tTT$.
   $$\begin{aligned} T \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R}) &\Rightarrow T \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R}) \text{ car } T \text{ triangulaire et ses coefficients diagonaux sont } \neq 0 \\ &\Rightarrow S \in \mathcal{G}\ell_n(\mathbb{R}) \text{ d'après } 9c \end{aligned}$$
   (b) On suppose que ${}^tT_1T_1 = {}^tT_2T_2$.
   i. D'après la question 8, $\Delta \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$, donc ses coefficients diagonaux sont donc strictement positifs. D'autre part :
   $${}^tT_1T_1 = {}^tT_2T_2 \Rightarrow T_1\,(T_2)^{-1} = \left({}^tT_1\right)^{-1}{}^tT_2 = {}^t\left(T_2T_1^{-1}\right).$$
   Encore d'après la question 8, $T_2T_1^{-1} \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ de sorte que sa transposée est triangulaire inférieure. La matrice Δ est donc triangulaire supérieure et inférieure donc
   $$\boxed{T_2T_1^{-1} \text{ est diagonale.}}$$
   ii. $\Delta^2 = {}^t\Delta\Delta$ car Δ est diagonale. Donc
   $$\begin{aligned} \Delta^2 &= {}^t\left(T_1\,(T_2)^{-1}\right) T_1\,(T_2)^{-1} \\ &= {}^t\left(T_1\,(T_2)^{-1}\right) {}^t\left(T_2T_1^{-1}\right) \text{ d'après le calcul de la question précédente} \\ &= \left(T_2T_1^{-1}\right)\left(T_1\,(T_2)^{-1}\right) = T_2\left(T_1^{-1}T_1\right)T_2^{-1} = T_2T_2^{-1} = \boxed{I_n = \Delta^2}. \end{aligned}$$
   iii. Δ=Diag$(d_1, \cdots, d_n)$ est diagonale, donc Δ^2 =Diag$(d_1^2, \cdots, d_n^2) = I_n$.
   Donc $\forall i \in [\![1\,;\,n]\!]$, $d_i = \pm 1$.
   Or $\Delta \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$ d'après 10.b.(i). Donc ses coefficients diagonaux sont positifs. Ainsi $\Delta = I_n$.
   Ainsi $\Delta = T_1\,(T_2)^{-1} = I_n$. D'où, en multipliant à droite par T_2, on obtient : $\boxed{T_1 = T_2.}$

(c) i. On suppose que $S \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et on considère φ_S le produit scalaire défini dans la question **??** : $\varphi_S(X,Y) = {}^tXSY$.

Soit $b = (e_1, \cdots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $b' = (v_1, \cdots, v_n)$ la base de $\mathbb{R}^n$ obtenue à partir de b en utilisant le théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt **pour le produit scalaire** φ_S.

On note T la matrice de passage de la base b' à la base b : si on note $T = (t_{ij})_{(i,j)\in[\![1\,;\,n]\!]^2}$, alors $\forall j \in [\![1\,;\,n]\!],\ e_j = \sum_{k=1}^{n} t_{kj}v_k$.

D'après le procédé d'orthonormalisation de Schmidt on sait que :

- Pour tout $i \in [\![1\,;\,n]\!]$, $\mathrm{Vect}(e_1, ..., e_i) = \mathrm{Vect}(v_1, ..., v_i)$. Ainsi T est triangulaire supérieure.
- Pour tout $j \in [\![1\,;\,n]\!]$, le produit scalaire $\varphi_S(e_j, v_j)$ est strictement positif. Calculons ce produit scalaire :

$$\begin{aligned}\varphi_S(e_j, v_j) &= \varphi_S\left(\sum_{k=1}^{n} t_{kj}v_k, v_j\right) = \sum_{k=1}^{n} t_{kj}\varphi_S(v_k, v_j) \text{ car le produit scalaire est bilinéaire}\\ &= t_{jj} \text{ car } \varphi_S(v_k, v_j) = \delta_{kj} \text{ (symbole de Kronecker)}\end{aligned}$$

Ainsi pour tout $j \in [\![1\,;\,n]\!]$, $t_{jj} > 0$.

Les deux conditions précédentes permettent d'affirmer que $\boxed{T \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R}).}$

ii. Soit $(X,Y) \in (\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R}))^2$. Alors $\varphi_S(X,Y) = {}^tXSY$.

On pose $X' = TX$ et $Y' = TY$, ce qui revient à poser $X = PX'$ et $Y = PY'$ où $P = T^{-1}$ est la matrice de passage de la base b à la base b'.

Alors $\varphi_S(X,Y) = {}^tXSY = {}^t(PX')SPY' = {}^tX'\,{}^tPSPY'$.

Or la j-ème colone de P contient les coordonnées de b' dans la base canonique, c'est à dire v_j. Donc le terme m_{ij} qui est à la i-ème ligne et j-ème colonne de ${}^tPSP$ vaut ${}^tv_iSv_j = \varphi_S(v_i, v_j) = \delta_{ij}$ par construction de la base b'.

Ainsi ${}^tPSP = I_n$

Or $P = T^{-1}$. Donc l'égalité ci-dessus devient : ${}^t(T^{-1})ST^{-1} = I_n$. En multipliant à gauche par ${}^tT$ et à droite par T, on obtient : $\boxed{S = {}^tTT.}$

N.B. : rappelons que ${}^t(T^{-1}) = ({}^tT)^{-1}$.

3 Analyse

Exercice 5

1. $|u_n| \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{\lambda n}$. Donc d'après **les théorèmes de comparaison des séries à termes positifs**, $\sum |u_n|$ et $\sum \dfrac{1}{\lambda n}$ sont de même nature. Or $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique) donc $\sum \dfrac{1}{\lambda n}$ diverge et donc $\boxed{\sum u_n \text{ n'est pas absolument convergente.}}$

2. $\displaystyle\int_0^1 t^{\lambda n} dt = \left[\frac{t^{\lambda n+1}}{\lambda n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{\lambda n+1}$ d'où le résultat.

3. Posons $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n = \sum_{n=0}^{N} (-1)^n \frac{1}{\lambda n+1}$. C'est une somme finie, donc par linéarité de l'intégrale :
$$\begin{aligned} S_N &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{N} t^{\lambda n} dt = \int_0^1 \frac{1-(-t^\lambda)^{n+1}}{1+t^\lambda} dt \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\lambda} + (-1)^N \int_0^1 \frac{(t^\lambda)^{N+1}}{1+t^\lambda} dt \end{aligned}$$
Posons $R_N = (-1)^N \displaystyle\int_0^1 \frac{(t^\lambda)^{N+1}}{1+t^\lambda} dt$. Il s'agit en fait de montrer que $\displaystyle\lim_{N\to\infty} R_N = 0$. Or
$$0 \leqslant |R_N\| \int_0^1 t^{\lambda(N+1)} dt = \frac{1}{\lambda N+1} \underset{N\to+\infty}{\to} 0$$
donc par encadrement : $\displaystyle\lim_{N\to\infty} R_N = 0$, ce qui signifie que $\boxed{\displaystyle\lim_{N\to\infty} S_N = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^\lambda}.}$

4. Pour $\lambda = 1$, on obtient à partir de la question précédente : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} = \ln(2)$.

   Pour $\lambda = 2$, on obtient de même : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [\text{Arctan}(x)]_0^1 = \pi/4$.

   $a_n = \dfrac{1}{(n+1)(2n+1)} \underset{n\to\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$ donc par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum a_n$ est de même nature que $\sum \dfrac{1}{2n^2}$, qui est convergente (série de Riemann).
   En faisant un calcul classique, on trouve que :
$$a_n = \frac{2}{2n+1} - \frac{1}{n+1} = \frac{2}{2n+1} - \frac{2}{2(n+1)} = 2\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right).$$
   Donc $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n = 2\sum_{n=0}^{N}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right) = 2\left(\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2n+1} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{2n+2}\right) = 2\sum_{n=0}^{2N+1} \frac{(-1)^n}{n+1}$. On trouve une suite extraite de la suite des sommes partielles de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ qui converge donc vers $\ln(2)$ d'après le début de cette question.

Exercice 6 (extrait de E3A PC 1 2015)

1. (a) La fonction $t \mapsto \tan t$ est continue, strictement croissante de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $]-\infty, +\infty[$.
Elle établit donc une bijection et admet ainsi une fonction réciproque, notée Arctan, donc définie de $]-\infty, +\infty[$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ également continue et strictement croissante.
En utilisant la formule $\left(f^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}(x)}$, on obtient :

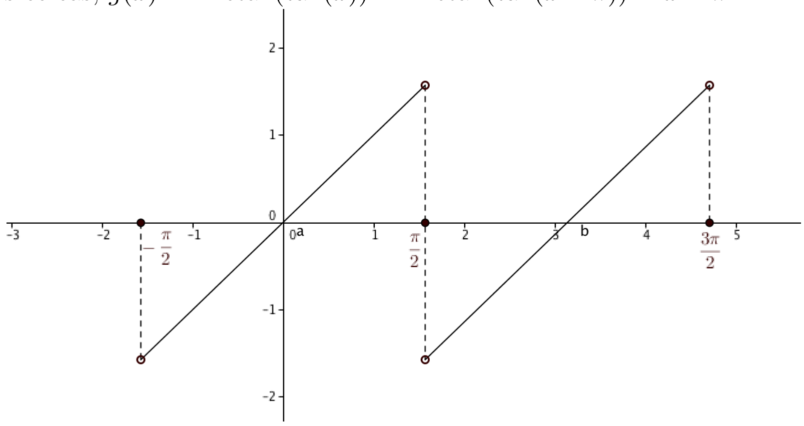
$$\underline{\forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

Comme la fonction tan, Arctan est une fonction impaire,
donc si $x > 0$, $\text{Arctan}(-x) = -\text{Arctan}(x)$. On va faire l'étude sur $\mathbb{R}_+$.
Par addition, la fonction $x \mapsto f(x) = \text{Arctan}(x) - x$ est de classe $\mathcal{C}^1$,

$$\forall x > 0, \qquad f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 1 = \frac{-x^2}{1-x^2} \leqslant 0$$

f est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+$, $\forall x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant f(0) = \text{Arctan}0 - 0 = 0$.
Ainsi, $\forall x \geqslant 0$, $|\text{Arctan}(x)| = \text{Arctan}x \leqslant x = |x|$, puis en exploitant l'imparité :
$\underline{\forall x \in \mathbb{R}, |\text{Arctan}(x)| \leqslant |x|}$.

(b) Si $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $g(x) = \text{Arctan}(\tan(x)) = x$.
Mais si $x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$, alors $\tan x = \tan(x-\pi)$, avec $x - \pi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,
et dans ce cas, $g(x) = \text{Arctan}(\tan(x)) = \text{Arctan}(\tan(x-\pi)) = x - \pi$.



(c) ψ est l'addition de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, elle est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour tout réel $x > 0$,

$$\psi'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}} = 0$$

Donc ψ est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.
En outre $\psi(1) = 2\text{Arctan}(1) = 2\frac{\pi}{4}$. Donc $\underline{\forall x > 0, \text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}}$

(d) Connaissant, le DSE de la fraction rationnelle (limite de la série géométrique), on a :

$$\forall x \in]-1, 1[, \qquad \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$

Par le théorème d'intégration terme à terme d'une série entière sur son intervalle ouvert de convergence :

$$\underline{\forall x \in]-1, 1[, \qquad \text{Arctan}(x) - \text{Arctan}(0) = \text{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}}$$

2. (a) La fonction Arctan admet un développement en série entière de rayon 1.
La fonction $h : x \mapsto \dfrac{\text{Arctan}(x)}{x}$ est continue en 0 (en effet : $\text{Arctan}(x) \underset{0}{\sim} x$).
On a donc pour tout $x \in]-1, 1[$, $h(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n}$.

(b) Une série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence, donc h est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,1[$. Pour l'extension sur $\mathbb{R}$, on utilisera le fait simple que $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \mapsto \text{Arctan}(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
Par réunion : $\underline{h \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$

3. (a) La fonction h est continue sur $\mathbb{R}$, puisqu'elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
On applique le théorème fondamental : h admet une primitive qui s'annule en 0 et qui est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
C'est la fonction H, avec $H' = h$

(b) Par composition, la fonction G est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
Et pour tout $x > 0$,

$$G'(x) = \frac{-1}{x^2}H'(\frac{1}{x}) = \frac{-1}{x^2}h(\frac{1}{x}) = \frac{-\text{Arctan}\frac{1}{x}}{x^2 \times \frac{1}{x}} = \frac{\text{Arctan}(x) + \dfrac{\pi}{2}}{x} = h(x) - \frac{\pi}{2x} = H'(x) - \frac{\pi}{2x}$$

En intégrant entre 1 et x, on a :

$$G(x) - G(1) = H(x) - H(1) - \frac{\pi}{2}\ln(x) + 0$$

Et comme $G(1) = H(1)$, on a donc $\underline{\forall x > 0,\ H(x) = G(x) + \dfrac{\pi}{2}\ln(x)}$

(c) Pour tout $x \in]-1,1[$, $h(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n}$, donc par le théorème d'intégration terme à terme pour les séries entières, on a :

$$\forall x \in]-1,1[,\ H(x) - H(0) = H(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}x^{2n+1}$$

et par suite

$$\forall x \in]-1,1[\setminus\{0\},\ f(x) = \frac{H(x)}{x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}x^{2n}$$

et la valeur de cette série entière en 0 est justement $1 = f(0)$. Donc f est bien développable en série entière sur $]-1,1[$ et donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur cet intervalle. Par ailleurs, comme H est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$, par produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$, f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Par union (recollement), $\underline{f \text{ est de classe } \mathcal{C}^\infty \text{ sur } \mathbb{R}}$

(d) Pour tout $x > 0$,

$$\underline{f\left(\frac{1}{x}\right)} = xH\left(\frac{1}{x}\right) = xG(x) = xH(x) - \frac{\pi}{2}x\ln(x) \underline{= x^2 f(x) - \frac{\pi}{2}x\ln(x)}$$

4. (a) D'après la première question, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|\frac{\text{Arctan}(tx)}{t(t^2+1)}\right| \leqslant \frac{|tx|}{|t|(t^2+1)}$$

Or la fonction $\alpha : t \mapsto \dfrac{|x|}{(t^2+1)}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. En effet, elle est continue et positive sur $\mathbb{R}^+$ et $\alpha(t) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{|x|}{t^2}$, donc par comparaison d'intégrales impropres de fonctions positives, $\displaystyle\int_1^\infty \alpha(t)dt$ et $\displaystyle\int_1^\infty \frac{|x|}{t^2}dt$ sont de même nature, et cette dernière intégrale est convergente (Riemann). Donc $\underline{\varphi \text{ est bien définie sur } \mathbb{R}}$.
En outre, $\underline{\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(-x) = -\varphi(x)}$, car Arctan est impaire.

(b) Appliquons un théorème d'intégrale à paramètre.
Notons $\overline{\varphi} : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $(x,t) \mapsto \dfrac{\text{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$
— Soit $t \in \mathbb{R}_+$. L'application $x \mapsto \overline{\varphi}(x,t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
Et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial\overline{\varphi}}{\partial x}(x,t) = \dfrac{1}{(1+t^2)(1+(tx)^2)}$
— Soit $x \in \mathbb{R}$. L'application $t \mapsto \dfrac{1}{(1+t^2)(1+(tx)^2)}$ est continue.

— Et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $x \in \mathbb{R}$, $\left|\dfrac{\partial \overline{\varphi}}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \dfrac{1}{1+t^2}$.

Or $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.

Les hypothèses sont donc vérifiées,

donc $\underline{\varphi \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } \forall x \in \mathbb{R},\ \varphi'(x) = \int_0^\infty \frac{1}{(1+t^2)(1+(xt)^2)}\mathrm{d}t}$

Pour $x \neq 1$, on utilise l'égalité donnée dans l'énoncé (et vérifiée simplement) :

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1-x^2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t - \frac{x^2}{1-x^2}\int_0^{+\infty} \frac{x}{1+x^2t^2}\mathrm{d}t$$

Pour la seconde intégrale, on fait le changement de variable linéaire (donc licite) $u \mapsto \dfrac{u}{x} = t$ $(x > 0)$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{1-x^2}\left[\mathrm{Arctan}(t)\right]_0^{+\infty} - \frac{x}{1-x^2}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u = \frac{1-x}{1-x^2}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2(1+x)}$$

Par ailleurs, ϕ est de classe $\mathcal{C}^1$ d'après la question précédente, donc ϕ' est continue, en particulier en $x = 1$ et donc $\phi'(1) = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\pi}{2(1+x)} = \dfrac{\pi}{4}$.

(c) ϕ' étant continue, on a

$$\underline{\varphi(x) =} \varphi(0) + \int_0^x \varphi'(t)\mathrm{d}t \underline{= \frac{\pi}{2}\ln(1+x)}$$

(d) A partir de la définition de φ, faisons le changement de variable donné par $[0, \dfrac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}_+$, $\theta \mapsto \tan\theta = t$. Le changement de variable est licite car de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \dfrac{\pi}{2}[$ et réalise une bijection strictement croissante de $[0, \dfrac{\pi}{2}[$ vers $\mathbb{R}^+$.

On a alors, puisque la dérivée de tan est $t \mapsto 1 + \tan^2(t) (> 0)$

$$\varphi(x) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{Arctan}(x\tan\theta)}{\tan\theta}\mathrm{d}\theta = K(x)$$

$\underline{\text{Donc } K \text{ est bien définie sur } \mathbb{R} \text{ et } K(x) = \frac{\pi}{2}\ln(1+x).}$

Et donc en $x = 1$,

$$K(1) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{Arctan}(\tan\theta)}{\tan\theta}\mathrm{d}\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{\theta\cos\theta}{\sin\theta}\mathrm{d}\theta$$

Faisons alors une intégration par parties avec $u(\theta) = \theta$ et $v(\theta) = \ln(\sin\theta)$.

Ce sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \dfrac{\pi}{2}[$ et $u'(\theta) = 1$, $v'(\theta) = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$.

L'intégration par parties est permises, car le crochet $[u(\theta)v(\theta)]_0^{\pi/2} = \dfrac{\pi}{2}\ln 1 - 0$ converge.

Donc

$$\underline{\frac{\pi}{2}\ln(2) = K(1) = -\int_0^{\pi/2} 1 \times \ln(\sin\theta)\mathrm{d}\theta}$$

4 Algèbre et Analyse

Exercice 7

1. Pour $f \in E$, notons F sa primitive qui s'annule en 0, à savoir $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. On a slors $T(f)(x) = \dfrac{F(x)}{x}$ pour $x > 0$ donc la fonction $T(f)$ est continue sur $[0, +\infty[$.
   Par ailleurs, $F' = f$ donc $\dfrac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \dfrac{F(x)}{x} \underset{x \to 0}{\to} F'(0) = f(0) = 0$ car $f \in E$. Donc $\lim\limits_{x \to 0} T(f)(x) = T(f)(0) = 0$. On en déduit que $T(f)$ est aussi continue en 0, et comme $T(f)(0) = 0$, on a bien $T(f) \in E$.
2. On a déjà vu que T est à valeurs dans E. Par ailleurs, $T(f + \lambda g)(x) = T(f)(x) + \lambda T(g)(x)$ pour $x > 0$ par linéarité de l'intégration et $T(f + \lambda g)(0) = 0 = T(f)(0) + \lambda T(g)(0)$.
   Donc $\boxed{T \in \mathcal{L}(E).}$
   Par ailleurs $f \in$Ker$(T) \Rightarrow F = 0$ sur $]0, +\infty[\Rightarrow F' = 0$ sur $]0, +\infty[\Rightarrow f$ est constante sur $]0, +\infty[$.
   Par ailleurs f étant continue en 0, la constante est égale f est aussi la limite en 0, qui vaut $f(0) = 0$. Donc f est nulle sur $[0, +\infty[$.
   $\boxed{\text{Conclusion : Ker}(T) = \{0\} \text{ donc } T \text{ est injectif.}}$
3. (a) On a une équation différentielle linéaire homogène du 1er ordre qui s'écrit aussi :

$$y' + \frac{\lambda - 1}{\lambda x} y = 0$$

   donc la solution générale est de la forme :

$$y(x) = K \exp\left(-\frac{\lambda - 1}{\lambda} \ln(|x|)\right) = K \exp\left(\frac{1 - \lambda}{\lambda} \ln(x)\right) = K x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \text{ où } K \in \mathbb{R}$$

   (b) On sait que $\lim\limits_{x \to 0} x^\alpha = 0 \iff \alpha = 0$. Donc les solutions de (E_λ) admettent toutes une limite nulle en 0 si et seulement si $\dfrac{1 - \lambda}{\lambda} > 0$ c'est à dire lorsque $\boxed{\lambda \in]0, 1[.}$

   (c) Tout d'abord, 0 n'est pas valeur propre de T car T est injectif (cf question 2).
   Soit λ une valeur propre de T et f un vecteur propre associé. Alors $\lambda \neq 0$. Puis

$$\begin{aligned} T(f) = \lambda f \quad &\Rightarrow \quad \forall x > 0,\ T(f)(x) = \lambda f(x) \text{ c'est à dire } f(x) = \frac{F(x)}{x} \\ &\Rightarrow \quad f \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[\text{ et } \forall x > 0,\ F(x) = \lambda x f(x) \\ &\Rightarrow \quad f \text{ est dérivable sur }]0, +\infty[\text{ et } \forall x > 0,\ F'(x) = f(x) = \lambda f(x) + \lambda x f'(x) \\ &\Rightarrow \quad \forall x > 0,\ f(x) = K x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}} \text{ où } K \in \mathbb{R} \text{ et } \lambda \in]0, 1[\text{ car } \lim_0 f = 0 \end{aligned}$$

   Conclusion partielle : si λ est une valeur propre de T, alors $\lambda \in]0, 1[$ et les vecteurs propres associés sont vérifient :

$$\exists K \in \mathbb{R} \text{ tel que } \forall x > 0,\ f(x) = K x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$$

   Réciproquement : Soit $\lambda \in]0, 1[$ et soit f définie par : $f(0) = 0$ et pour $x > 0$, $f(x) = K x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ où $K \in \mathbb{R}$.
   Alors : f est continue en 0 et véfinie bien $f(0) = 0$ donc $f \in E$.
   Par ailleurs : pour $x > 0$, on a : $T(f)(x) = \dfrac{1}{x} \displaystyle\int_0^x t^{\frac{1}{\lambda} - 1} dt = \dfrac{1}{x} \left[\lambda t^{1/\lambda}\right]_0^x = \lambda x^{\frac{1}{\lambda} - 1} = \lambda f(x)$ donc f est bien vecteur propre associé à λ (sachant qu'on a trivialement $T(f)(0) = \lambda f(0)$).

5 Algèbre et probabilités

Exercice 8 (extrait de E3A PSI 2018 mathématiques 1)

1. Soit E un ensemble à n éléments et soit $\mathcal{P}_k(E)$ l'ensemble des parties de E qui sont de cardinal k.

   Alors $\mathcal{P}(E) = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{n} \mathcal{P}_k(E)$ et cette union est disjointe.

   Donc $\mathrm{Card}(\mathcal{P}(E) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \mathrm{Card}(\mathcal{P}_k(E)$, c'est à dire $\boxed{2^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.}$

2. Les événements $A_{i,j} = [X = i] \cap [Y = j]$, pour $(i,j) \in [\![1\,;\,n+1]\!]^2$, forment un système complet d'événements, donc $\displaystyle\sum_{(i,j)\in[\![1\,;\,n+1]\!]^2} \mathbb{P}(A_{i,j}) = 1$.

   Or d'après la question 1 :

$$\sum_{(i,j)\in[\![1\,;\,n+1]\!]^2} \mathbb{P}(A_{i,j}) = \sum_{i=1}^{n+1}\sum_{j=1}^{n+1} \alpha \binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1} = \alpha \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} = \alpha 4^n.$$

   $\boxed{\text{Donc } \alpha = \dfrac{1}{4^n}.}$

3. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([Y = j])_{j\in[\![1\,;\,n+1]\!]}$, tous de probabilité non nulle et l'on obtient :

   $\forall i \in [\![1\,;\,n+1]\!]$, $\mathbb{P}(X = i) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{\binom{n}{i-1}}{4^n} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} = \frac{\binom{n}{i-1}}{2^n}$.

   Par symétrie, $\forall j \in [\![1\,;\,n+1]\!]$, $\mathbb{P}(Y = j) = \dfrac{\binom{n}{j-1}}{2^n}$.

   Ainsi $\forall (i,j) \in [\![1\,;\,n+1]\!]^2$, $\mathbb{P}([X = i] \cap [Y = j]) \dfrac{\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}}{4^n} = \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j)$.

   $\boxed{\text{Les variables } X \text{ et } Y \text{ sont donc indépendantes.}}$

4. La variable $Z = X - 1$ est à valeurs dans $[\![0\,;\,n]\!]$ et

$$\forall k \in [\![0\,;\,n]\!],\ P(Z = k) = P(X = k+1) = \binom{n}{k}\frac{1}{2^k}.$$

   $\boxed{\text{Donc } Z \sim \mathcal{B}(n, \tfrac{1}{2}).}$ En particulier, $\mathbb{E}(Z) = \dfrac{n}{2}$ et $\mathbb{V}(Z) = \dfrac{n}{4}$.

   On en déduit par linéarité de l'espérance que $\boxed{\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Z) + 1 = \dfrac{n}{2} + 1}$, et par la formule donnant la variance d'une transformation affine que $\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Z) = \dfrac{n}{4}.}$

5. Par définition des coefficients binomiaux, les parties de A de cardinal r sont au nombre de $\dbinom{p+q}{r}$.

   Partitionnons A en deux parties A_1 et A_2 de cardinal p et q respectivement.

   Pour tout $k \in [\![0\,;\,r]\!]$, le nombre de parties de A de cardinal r et comportant exactement k éléments de A_1 (et donc $r - k$ éléments de A_2) est égal à $\dbinom{p}{k}\dbinom{q}{r-k}$, puisqu'il y a autant de telles parties que de couples constitués d'une partie de A_1 de cardinal k et d'une partie de A_2 de cardinal $r - k$.

   Ainsi, la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{r} \binom{p}{k}\binom{q}{r-k}$ est égale au nombre total de parties de A de cardinal r.

   L'égalité demandée résulte de la comparaison des résultats des deux points précédents.

6. Le cas $p = q = r = n$ dans l'égalité de **5** donne $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$, puisque $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$.

7. (a) Les colonnes de la matrice B sont toutes non nulles et proportionnelles à la colonne des coefficients binomiaux $\dbinom{n}{i-1}$ pour $1 \leqslant i \leqslant n+1$, donc $\mathrm{rg}(B) = 1$.

   (b) On a $\mathrm{Tr}(B) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}([X = i] \cap [Y = i]) = \frac{1}{4^n} \sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1}^2 = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$ par **6**.