CCP PC 2019 - Corrigé

Exercice 1 : Polynôme de Laguerre et méthode de quadrature de Gauss

Partie I - Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

I.1 - Généralités

1. • $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est continue sur $[0,1]$, donc intégrable sur $[0,1]$.
   • $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est continue sur $[1,+\infty[$.
   $P(t)Q(t)e^{-t} = \underset{t\to+\infty}{O}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$ par croissances comparées.
   Or $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ (Riemann et $2>1$), donc, par comparaison, $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$.
   $t \mapsto P(t)Q(t)e^{-t}$ est donc intégrable sur $\mathbb{R}_+$, donc, en particulier, l'intégrale définissant $(P|Q)$ est convergente
2. • L'application $(.|.)$ est bien définie à valeurs dans $\mathbb{R}$.
   • Pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$,
   $$(P|Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} Q(t)P(t)e^{-t}dt = (Q|P),$$
   donc $(.|.)$ est symétrique.
   • Pour tout $(P,Q,R) \in \mathbb{R}_n[X]^3$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,
   $$\begin{aligned}(\lambda P+Q|R) &= \int_0^{+\infty} (\lambda P(t)+Q(t))R(t)e^{-t}dt\\ &= \lambda\int_0^{+\infty} P(t)R(t)e^{-t}dt + \int_0^{+\infty} Q(t)R(t)e^{-t}dt \quad \text{(par linéarité de l'intégrale convergente)}\\ &= \lambda(P|R)+(Q|R),\end{aligned}$$
   donc $(.|.)$ est linéaire à gauche.
   • $(.|.)$ est linéaire à gauche et symétrique, donc bilinéaire.
   • Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $P^2(t)e^{-t} \geq 0$.
   D'où, par positivité de l'intégrale (qui converge et "$+\infty > 0$"), on a :
   $$(P|P) = \int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}dt \geq 0.$$
   $(.|.)$ est donc positif.
   • Enfin, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, si $(P|P)=0$, alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}dt = 0$.
   Or $t \mapsto P^2(t)e^{-t}$ est continue et positive sur $\mathbb{R}_+$, "$0 < +\infty$" et $\displaystyle\int_0^{+\infty} P^2(t)e^{-t}dt$ converge, donc pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $P^2(t)e^{-t} = 0$, et donc $P^2(t) = 0$, puis $P(t) = 0$.
   Le polynôme P a donc une infinité de racines (tous les éléments de $\mathbb{R}_+$), donc $P = 0$.
   $(.|.)$ est donc bien défini.
   • $(.|.)$ définit donc bien un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

I.2 - Calcul d'un produit scalaire

3. Posons $u(t) = t^k$, $u'(t) = kt^{k-1}$, $v'(t) = e^{-t}$, $v(t) = -e^{-t}$.
   u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,+\infty[$.
   $u(t)v(t) = -t^k e^{-t} \underset{t\to+\infty}{\to} 0$ par croissances comparées.
   Enfin, les deux intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} u(t)v'(t)dt$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} u'(t)v(t)dt$ sont convergentes.
   On peut donc intégrer par parties et on a :
   $$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt &= [-t^k e^{-t}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} kt^{k-1}e^{-t}dt\\ &= 0 + k\int_0^{+\infty} t^{k-1}e^{-t}dt.\end{aligned}$$

4. Montrons par récurrence que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $(X^k|1) = k!$ (HR_k)

Initialisation : Pour $k=0$, $(X^0|1) = (1|1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$ (cours), donc on a bien HR_0.

Hérédité : Soit $k \in [\![0,n-1]\!]$ et supposons HR_k vérifiée.
Alors, d'après la question précédente, comme $k+1 \in [\![1,n]\!]$, on a

$$(X^{k+1}|1) = \int_0^{+\infty} t^{k+1}e^{-t}dt = (k+1)\int_0^{+\infty} t^k e^{-t}dt = (k+1)(X^k|1) \underset{HR_k}{=} (k+1)k! = (k+1)!.$$

On a bien HR_{k+1}.

Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $(X^k|1) = k!$.

Partie II - Construction d'une base orthogonale

II.1 - Propriétés de l'application α

5. • Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\alpha(P) = XP'' + (1-X)P'$ est un polynôme.
De plus, comme $\deg(P') \leq \deg(P) - 1 \leq n-1$ et $\deg(P'') \leq n-2$, on a

$$\deg(\alpha(P)) \leq \max(\deg(XP''), \deg((1-X)P')) \leq \max(1+n-2, 1+n-1) \leq n,$$

donc $\alpha(P) \in \mathbb{R}_n[X]$. On a donc $\alpha : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$.
• De plus, pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\alpha(\lambda P + Q) &= X(\lambda P+Q)'' + (1-X)(\lambda P + Q)' \\ &= X(\lambda P'' + Q'') + (1-X)(\lambda P' + Q') \quad \text{(par linéarité de la dérivation)} \\ &= \lambda XP'' + XQ'' + \lambda(1-X)P' + (1-X)Q' = \lambda(XP'' + (1-X)P') + (XQ'' + (1-X)Q') \\ &= \lambda\alpha(P) + \alpha(Q),\end{aligned}$$

donc α est une application linéaire.
• α est donc bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

6. On a $\alpha(1) = X(1)'' + (1-X)(1)' = 0$, $\alpha(X) = X(X)'' + (1-X)(X)' = 1-X$ et, pour tout $k \in [\![2,n]\!]$,

$$\alpha(X^k) = X(X^k)'' + (1-X)(X^k)' = Xk(k-1)X^{k-2} + (1-X)kX^{k-1} = -kX^k + k^2X^{k-1}.$$

Rq : On remarque que cette formule est encore valable pour $k=1$, donc on a,

$$\boxed{\forall k \in [\![1,n]\!],\ \alpha(X^k) = -kX^k + k^2X^{k-1} \quad et \quad \alpha(1) = 0.}$$

On a donc

$$Mat_{(1,X,\dots,X^n)}(\alpha) = Mat_{(1,\dots,X^n)}(\alpha(1),\dots,\alpha(X^n)) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2^2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & -(n-1) & n^2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -n \end{pmatrix}.$$

7. Comme $Mat_{(1,X,\dots,X^n)}(\alpha)$ est triangulaire supérieure, son spectre se lit sur la diagonale. On a donc

$$\mathrm{Sp}(\alpha) = \mathrm{Sp}\left(Mat_{(1,X,\dots,X^n)}(\alpha)\right) = \{-k | k \in [\![0,n]\!]\}.$$

II.Vecteurs propres de l'application α

On fixe un entier $k \in [\![0,n]\!]$.

8. Comme α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ ayant $n+1$ valeurs propres, toutes ces valeurs propres sont simples.
$-k$ est donc valeur propre simple de α, donc $\dim E_{-k}(\alpha) = \dim(\ker(\alpha + k\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})) = 1$.

9. • Soit (Q_k) une base de $\ker(\alpha + k\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$ avec $Q_k \neq 0$.
Notons a le coefficient dominant de Q_k (non nul car $Q_k \neq 0$).
Alors $P_k = \frac{1}{a}Q_k$ est un polynôme ayant un coefficient dominant égal à 1.
De plus, $P_k = \frac{1}{a}Q_k \in \mathrm{Vect}(Q_k) = \ker(\alpha + k\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$, donc

$$(\alpha + k\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})(P_k) = 0 \Leftrightarrow \alpha(P_k) + kP_k = 0 \Leftrightarrow \alpha(P_k) = -kP_k.$$

Il existe donc bien un polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.
• Supposons qu'il existe un autre polynôme $R_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.

Alors $R_k \in \ker(\alpha + k\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}) = \mathrm{Vect}\,(Q_k) = \mathrm{Vect}\left(\frac{1}{a}Q_k\right) = \mathrm{Vect}\,(P_k)$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $R_k = \lambda P_k$.
De plus, les deux polynômes P_k et R_k ont le même coefficient dominant (1), donc $\lambda = 1$, et, par suite, $R_k = P_k$. On a donc bien l'unicité.
• Il existe donc bien un unique polynôme $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(P_k) = -kP_k$.

10. Soit d le degré de P_k, avec $d \in [\![0, n]\!]$ car P_k est non nul et $P_k \in \mathbb{R}_n[X]$.

Il existe donc $(a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ tels que $P_k = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ (et $a_d = 1$).

Alors on a :

$$\begin{aligned}\alpha(P_k) &= \sum_{i=0}^{d} a_i \alpha(X^i) \quad \text{(par linéarité de } \alpha\text{)}\\ &= 0 + \sum_{i=1}^{d} a_i \left(-iX^i + i^2 X^{i-1}\right) \quad \text{(d'après la question 6)}\\ &= \sum_{i=1}^{d} -ia_i X^i + \sum_{i=0}^{d} a_i i^2 X^{i-1}.\end{aligned}$$

Comme on a par ailleurs $\alpha(P_k) = -kP_k$ (car $P_k \in \ker(\alpha + k\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]})$), on obtient, en identifiant les coefficients dominants :

$$-da_d = -ka_d \underset{a_d=1}{\Leftrightarrow} -d = -k \Leftrightarrow d = k,$$

donc P_k est de degré k.

11. • On a $\alpha(1) = 0 = -0(1)$ et le coefficient dominant de 1 est 1, donc, par unicité de P_0, on a $P_0 = 1$.
• On a $\alpha(X) = -X + 1$, donc $\alpha(X - 1) = \alpha(X) - \alpha(1) = -X + 1 + 0 = -(X - 1)$, et le coefficient dominant de $X - 1$ est 1, donc, par unicité de P_1, on a $P_1 = X - 1$.
• Le coefficient dominant de $X^2 - 4X + 2$ est 1 et

$$\alpha(X^2 - 4X + 2) = \alpha(X^2) - 4\alpha(X) + 2\alpha(1) = -2X^2 + 4X - 4(-X + 1) + 0 = -2X^2 + 8X - 4 = -2(X^2 - 4X + 2),$$

donc, par unicité de P_2, on a $P_2 = X^2 - 4X + 2$.

II.3 - Orthogonalité de la famille $(P_0, \ldots, P_n)$

Soit $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

12. • Par linéarité de l'intégrale convergente,

$$(\alpha(P)|Q) = \int_0^{+\infty} (tP''(t) + (1 - t)P'(t))Q(t)e^{-t}dt = \int_0^{+\infty} (tP''(t) + P'(t))Q(t)e^{-t} - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q(t)e^{-t}dt,$$

où toutes ces intégrales convergent d'après la question 1.
• Posons $u'(t) = tP''(t) + P'(t)$, $u(t) = tP'(t)$, $v(t) = Q(t)e^{-t}$, $v'(t) = Q'(t)e^{-t} - Q(t)e^{-t}$.
u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$.
$u(t)v(t) = tP'(t)Q(t)e^{-t} \underset{t \to +\infty}{\to} 0$ par croissances comparées.
Enfin, toutes les intégrales convergent (toujours d'après la question 1).
On peut donc intégrer par parties et on a :

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} (tP''(t) + P'(t))Q(t)e^{-t}dt &= \left[tP'(t)Q(t)e^{-t}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} tP'(t)(Q'(t)e^{-t} - Q(t)e^{-t})dt\\ &= 0 - 0 - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt + \int_0^{+\infty} tP'(t)Q(t)e^{-t}dt \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)},\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}(\alpha(P)|Q) &= \int_0^{+\infty} (tP''(t) + P'(t))Q(t)e^{-t} - \int_0^{+\infty} tP'(t)Q(t)e^{-t}dt\\ &= -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt.\end{aligned}$$

13. Par symétrie des rôles de P et Q, on a aussi

$$(\alpha(Q)|P) = -\int_0^{+\infty} tQ'(t)P'(t)e^{-t}dt = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt,$$

donc, par symétrie du produit scalaire,

$$(\alpha(P)|Q) = -\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)e^{-t}dt = (\alpha(Q)|P) = (P|\alpha(Q)).$$

14. • Pour tout $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$,

$$\begin{aligned} & (\alpha(P_i)|P_j) = (-iP_i|P_j) = -i(P_i|P_j) \\ \text{et} \quad & (\alpha(P_i)|P_j) = (P_i|\alpha(P_j)) = (P_i|-jP_j) = -j(P_i|P_j), \end{aligned}$$

donc, d'après la question 13, $-i(P_i|P_j) = -j(P_i|P_j)$, donc $(i-j)(P_i|P_j) = 0$, donc, si $i \neq j$, on a $(P_i|P_j) = 0$.
La famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est donc orthogonale.
• De plus, elle est composée de vecteurs non nuls (car le coefficient dominant de ces polynômes vaut 1), donc cette famille est libre.
Comme elle est libre et composée de $n+1$ polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$, espace vectoriel de dimension $n+1$, c'est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
• La famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est donc bien une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

Partie III - Méthode de quadrature de Gauss

15. Remarquons déjà que, pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = (1|X^k) = k!$ d'après la question 4.

$\boxed{\Rightarrow}$ Si un n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ vérifie $(*)$, alors pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, en posant $P(X) = X^k \in \mathbb{R}_n[X]$, on doit avoir

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k, \quad \text{ie} \quad k! = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k.$$

Le n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie donc bien :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Réciproquement, si n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifie

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix},$$

alors pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, la ligne k de ce système donne $\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k = k! = \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt$.

D'où, pour tout polynôme $P = \displaystyle\sum_{k=0}^n a_k X^k$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \lambda_i P(x_i) &= \sum_{i=1}^n \sum_{k=0}^n \lambda_i a_k x_i^k = \sum_{k=0}^n a_k \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^k \\ &= \sum_{k=0}^n a_k \int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^n a_k t^k e^{-t} dt \quad \text{(par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_0^{+\infty} P(t) e^{-t} dt. \end{aligned}$$

On a donc bien $(*)$.

16. La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est une matrice de Van der Monde, donc inversible car les x_i sont deux à deux distincts.

Le système $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0! \\ 1! \\ \vdots \\ (n-1)! \end{pmatrix}$ est donc de Cramer, donc il admet un unique n-uplet solution. D'où l'unicité de $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ vérifiant $(*)$.

17. • Soit $P = P_n^2$. Alors $\deg(P) = 2\deg(P_n) = 2n$, donc $P \in \mathbb{R}_{2n}[X]$.
• De plus, $t \mapsto P(t)e^{-t} = P_n^2(t)e^{-t}$ est continue, positive et non nulle sur $\mathbb{R}_+^*$ (car P_n, non nul, n'a pas une infinité de

racines), donc, par stricte positivité de l'intégrale ("$0 < +\infty$"), $\displaystyle\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt > 0$.

- Enfin, comme x_i est racine de P_n pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, x_i est aussi racine de $P = P_n^2$, donc $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i) = \sum_{i=1}^{n} 0 = 0$,

donc on a bien
$$\int_0^{+\infty} P(t)e^{-t}dt \neq 0 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(x_i).$$

Exercice 2 : Etude d'une équation différentielle

Partie I - Solution particulière de l'équation homogène

1. f est développable en série entière sur $]-r, r[$, donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-r, r[$ et, pour tout $x \in]-r, r[$,
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2},$$
donc f' et f'' sont développables en série entière sur $]-r, r[$.
De plus, d'après le cours, les séries entières définissant f, f' et f'' ont le même rayon de convergence : r.

2. Alors, pour tout $x \in]-r, r[$,
$$\begin{aligned}
x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) &= x^2(1-x)\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - x(1+x)\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n+1} - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=3}^{+\infty} (n-1)(n-2)a_{n-1} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)a_{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad \text{(changement d'indice)} \\
&= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n - \left(\sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)(n-2)a_{n-1} x^n - 0\right) - \left(a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} n a_n x^n\right) \\
&\quad - \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)a_{n-1} x^n + \left(a_0 + a_1 x + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) \\
&= a_0 + a_1 x - a_1 x + \sum_{n=2}^{+\infty} \big(\big(n(n-1)a_n - (n-1)(n-2)a_{n-1} - n a_n - (n-1)a_{n-1} + a_n\big)x^n\big) \\
&= a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)^2(a_n - a_{n-1})x^n.
\end{aligned}$$
En posant, pour tout $n \geq 2$, $b_n = (n-1)^2$, on a donc bien, pour tout $x \in]-r, r[$,
$$x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n - a_{n-1})x^n.$$

3. f est solution de (E) sur $]-r, r[$ si et seulement si pour tout $x \in]-r, r[$,
$$x^2(1-x)f''(x) - x(1+x)f'(x) + f(x) = 0 \Leftrightarrow a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)^2(a_n - a_{n-1})x^n = 0.$$
Comme 0 est son propre développement en série entière, de rayon de convergence $+\infty$, on a, par unicité du développement en série entière sur $]-r, r[$,
$$\left(\forall x \in]-r, r[,\ a_0 + \sum_{n=2}^{+\infty} (n-1)^2(a_n - a_{n-1})x^n = 0\right) \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geq 2, (n-1)^2(a_n - a_{n-1}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 0 \\ \forall n \geq 2, a_n = a_{n-1} \end{cases}.$$
D'où f est solution de (H) sur $]-r, r[$ si et seulement si $a_0 = 0$ et $a_{n+1} = a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. La suite (a_n) est donc stationnaire à partir du rang 1, donc, en posant $\lambda = a_1 \in \mathbb{R}$, on a, pour tout $n \geq 1$, $a_n = a_1 = \lambda$ et $a_0 = 0$.

   Par suite, si f est solution de (H) sur $]-r, r[$, alors $f : x \mapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda x^n$.

   Or, la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 1} x^n$ a pour rayon de convergence 1, donc $r \geq 1$ et, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda x^n = \lambda x \frac{1}{1-x} = \frac{\lambda x}{1-x} \quad \text{(série géométrique de raison } x \in]-1,1[).$$

   Rq : on a $r \geq 1$ car, dans le cas $\lambda = 0$, on a $r = +\infty$.
   Cependant, pour tout $\lambda \neq 0$, on aura $r = 1$.

5. Réciproquement, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction

$$g :]-1,1[\to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{\lambda x}{(1-x)} = \lambda x \times \frac{1}{1-x}$$

   est développable en série entière sur $]-1,1[$ (car $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ l'est) et, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$g(x) = \lambda x \frac{1}{1-x} = \lambda x \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda x^n.$$

   Par suite, d'après la question 3, g est solution de (H) sur $]-1,1[$.
   Conclusion : par analyse synthèse : les solutions de (H) développables en série entière au voisinage de 0 sont les fonctions $x \mapsto \dfrac{\lambda x}{1-x}$, qui seront solutions de (H) sur $]-1,1[$ (et même $\mathbb{R}$ dans le cas $\lambda = 0$).

Partie II - Solutions de (E) sur $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$

6. $x \mapsto \dfrac{1}{x} - 1$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^*$.
   z est donc de classe $\mathcal{C}^2$ sur I comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et, pour tout $x \in I$,

$$z'(x) = -\frac{1}{x^2} y(x) + \left(\frac{1}{x} - 1\right) y'(x) \quad \text{et} \quad z''(x) = \frac{2}{x^3} y(x) - \frac{2}{x^2} y'(x) + \left(\frac{1}{x} - 1\right) y''(x).$$

7. $\boxed{\Rightarrow}$ Si y est solution de (E) sur I, alors y est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I, donc, d'après 6, $z : x \mapsto \left(\dfrac{1}{x} - 1\right) y(x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I et, pour tout $x \in I$,

$$\begin{aligned}
xz''(x) + z'(x) &= x\left(\frac{2}{x^3} y(x) - \frac{2}{x^2} y'(x) + \left(\frac{1}{x} - 1\right) y''(x)\right) + \left(-\frac{1}{x^2} y(x) + \left(\frac{1}{x} - 1\right) y'(x)\right) \\
&= \frac{2y(x) - 2xy'(x) + x^2(1-x)y''(x) - y(x) + x(1-x)y'(x)}{x^2} \\
&= \frac{x^2(1-x)y''(x) - x(x+1)y'(x) + y(x)}{x^2} \\
&= \frac{2x^3}{x^2} \quad \text{(car } y \text{ est solution de } (E) \text{ sur } I) \\
&= 2x,
\end{aligned}$$

   donc z est bien solution de (E_1) sur I.
   $\boxed{\Leftarrow}$ Si z est solution de (E_1) sur I, alors z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I.
   De plus, pour tout $x \in I$, comme $x \notin \{0, 1\}$,

$$z(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right) y(x) \Leftrightarrow z(x) = \frac{1-x}{x} y(x) \Leftrightarrow y(x) = \frac{x}{1-x} z(x) \Leftrightarrow y(x) = \left(1 - \frac{1}{1-x}\right) z(x),$$

   Par suite, y est de classe $\mathcal{C}^2$ sur I comme produit de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ et, pour tout $x \in I$,

$$xz''(x) + z'(x) = \frac{x^2(1-x)y''(x) - x(1+x)y'(x) + y(x)}{x^2}$$

   d'après le calcul fait dans le point précédent, donc

$$x^2(1-x)y''(x) - x(1+x)y'(x) + y(x) = x^2(xz''(x) + z'(x)) = x^2(2x) = 2x^3$$

   car z est solution de (E_1) sur I. y est donc bien solution de (E) sur I.
   Conclusion : Par double-implication, on a bien l'équivalence souhaitée.

8. • z est solution de (E_1) sur I si et seulement si z' est solution de l'équation différentielle $xy'+y=2x \Leftrightarrow y'+\dfrac{1}{x}y=2$.

   • L'équation homogène $y'+\dfrac{1}{x}y=0$ a pour solutions $x\mapsto \lambda e^{-\ln x}=\dfrac{\lambda}{x}$ où $\lambda\in\mathbb{R}$.

   $x\mapsto x$ est une solution particulière de $y'+\dfrac{1}{x}y=2$ sur I.

   L'ensemble des solutions de $y'+\dfrac{1}{x}y=2$ sur I est donc $x\mapsto \dfrac{\lambda}{x}+x$, où $\lambda\in\mathbb{R}$.

   • z est solution de (E_1) sur I si et seulement si $z' : x\in I\mapsto \dfrac{\lambda}{x}+x$, où $\lambda\in\mathbb{R}$.

   On a démontré plus que l'implication demandée par l'énoncé car l'équivalence nous sera utile et ne coûte rien ici...

9. On a donc :

$$\begin{aligned}
y \text{ solution de } (E) \text{ sur } I &\Leftrightarrow z \text{ solution de } (E_1) \text{ sur } I\\
&\Leftrightarrow \exists\lambda\in\mathbb{R} : \forall x\in I, z'(x)=\frac{\lambda}{x}+x\\
&\Leftrightarrow \exists\lambda,\mu\in\mathbb{R} : \forall x\in I, z(x)=\lambda\ln(x)+\frac{x^2}{2}+\mu \quad (\text{car } I \text{ est un intervalle et } x>0)\\
&\Leftrightarrow \exists\lambda,\mu\in\mathbb{R} : \forall x\in I, y(x)=\frac{x}{1-x}z(x)=\frac{2\lambda x\ln(x)+x^3+2\mu x}{2(1-x)}.
\end{aligned}$$

   L'ensemble des solutions de (E) sur I est $\{x\mapsto \dfrac{\lambda x\ln(x)+x^3+\mu x}{2(1-x)},\quad (\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\}$.

Partie III - Solutions de (E) sur $]0,+\infty[$

10. **Analyse :** Soit f une solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors
   - f est solution de (E) sur $]0,1[$, donc, d'après la partie II, il existe $(a,b)\in\mathbb{R}$ tels que :
   $$\forall x\in]0,1[,\quad f(x)=\frac{ax\ln(x)+x^3+bx}{2(1-x)}.$$
   - f est solution de (E) sur $]1,+\infty[$, donc, d'après la partie II, il existe $(c,d)\in\mathbb{R}$ tels que :
   $$\forall x\in]0,1[,\quad f(x)=\frac{cx\ln(x)+x^3+dx}{2(1-x)}.$$
   - Pour tout $x>1$, en posant $x=1+h\Leftrightarrow h=x-1$, on a
   $$\begin{aligned}
   f(x)=f(1+h)&=\frac{c(1+h)\ln(1+h)+(1+h)^3+d(1+h)}{-2h}\\
   &=\frac{c(1+h)\left(h-\frac{h^2}{2}+o(h^2)\right)+1+3h+3h^2+o(h^2)+d+dh}{-2h}\\
   &=\frac{ch+ch^2-c\frac{h^2}{2}+1+3h+3h^2+d+dh+o(h^2)}{-2h}\\
   &=-\frac{1+d}{2h}-\frac{c+d+3}{2}-\frac{c+6}{4}h+\underset{h\to0^+}{o}(h)\\
   &=-\frac{1+d}{2(x-1)}-\frac{c+d+3}{2}-\frac{c+6}{4}(x-1)+\underset{x\to1^+}{o}(x-1)
   \end{aligned}$$
   et, pour tout $x\in]0,1[$, en posant $x=1-h\Leftrightarrow h=1-x$, on a
   $$\begin{aligned}
   f(x)=f(1-h)&=\frac{a(1-h)\ln(1-h)+(1-h)^3+b(1-h)}{2h}\\
   &=\frac{a(1-h)\left(-h-\frac{h^2}{2}+o(h^2)\right)+1-3h+3h^2+o(h^2)+b-bh}{2h}\\
   &=\frac{-ah+ah^2-a\frac{h^2}{2}+1-3h+3h^2+b-bh+o(h^2)}{2h}\\
   &=\frac{1+b}{2h}-\frac{a+b+3}{2}+\frac{a+6}{4}h+\underset{h\to0^+}{o}(h)\\
   &=-\frac{1+b}{2(x-1)}-\frac{a+b+3}{2}-\frac{a+6}{4}(x-1)+\underset{x\to1^+}{o}(x-1)
   \end{aligned}$$
   - f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, donc en 1, donc f doit avoir une limite finie en 1^+ et 1^-.
   Or, d'après le calcul précédent, si $d\neq-1$, $f(x)\underset{x\to1^+}{\sim}-\dfrac{1+d}{2(x-1)}\underset{x\to1^+}{\to}\pm\infty$ (selon le signe de $1+d$), donc on doit avoir $d=-1$.
   De même, pour avoir une limite en 1^-, on doit avoir $1+b=0\Leftrightarrow b=-1$.

– Comme f est continue en 1, on doit avoir, avec les valeurs imposées pour b et d, on a :

$$-\frac{c+2}{2} = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\frac{a+2}{2}, \quad \text{donc} \quad a = c \quad \text{et} \quad f(1) = -\frac{c+2}{2}.$$

Si f existe, alors il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \begin{cases} -\dfrac{a+2}{2} & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{ax\ln(x) + x^3 - x}{2(1-x)} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}.$$

Synthèse : Réciproquement, si f est définie ainsi, alors,
– f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ par opérations sur les fonctions usuelles.
– Pour tout $x \in]0,2[\setminus\{1\}$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{ax\ln(x) + x^3 - x}{2(1-x)} = a\frac{x\ln(x)}{2(1-x)} - \frac{x(x+1)}{2} \\ &= a\frac{(1+h)\ln(1+h)}{-2h} - \frac{(1+h)(2+h)}{2} \quad \text{(en posant } x = 1+h \text{ avec } h \in]-1,1[\setminus\{0\}) \\ &= -a\frac{1+h}{2h}\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{h^n}{n} - \frac{(1+h)(2+h)}{2} \quad \text{(DSE de } \ln(1+t) \text{ pour } t \in]-1,1[) \\ &= -\frac{a(1+h)}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n h^n}{n+1} - \frac{(1+h)(2+h)}{2} \\ &= g(x-1), \end{aligned}$$

où $g : t \mapsto -\dfrac{a(1+t)}{2}\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n t^n}{n+1} - \frac{(1+t)(2+t)}{2}$.

L'égalité est encore valable pour $x = 1$ car $f(1) = -\dfrac{a+2}{2}$ et $g(0) = -\dfrac{a}{2} \times \dfrac{1}{1} - \dfrac{1\times 2}{2} = -\dfrac{a+2}{2}$, donc pour tout $x \in]0,2[$, $f(x) = g(x-1)$.

Or, g est développable en série entière sur $]-1,1[$, donc g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1,1[$, donc $f : x \mapsto g(x-1)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,2[$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. Par suite, f est de classe $\mathcal{C}^2$ en 1, et, par suite, sur $\mathbb{R}_+^*$.

– Enfin, par construction, f est solution de E sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$.
De plus, comme f est de classe $\mathcal{C}^2$ en 1, $x \mapsto x^2(1-x)y''(x) - x(1+x)y'(x) + y(x)$ est continue en 1, donc

$$\begin{aligned} 1^2(1-1)y''(1) - 1(1+1)y'(1) + y(1) &= \lim_{x\to 1} x^2(1-x)y''(x) - x(1+x)y'(x) + y(x) \\ &= \lim_{x\to 1} 2x^3 \quad \text{(car } f \text{ est solution de } (E) \text{ sur }]0,1[\text{ et sur }]1,+\infty[) \\ &= 2\times 1^3 = 2, \end{aligned}$$

donc f est aussi solution de (E) en 1.

Conclusion : Les fonctions solution de (E) sur $\mathbb{R}_+^*$ sont les fonctions

$$x \mapsto \begin{cases} -\dfrac{a+2}{2} & \text{si } x = 1 \\ \dfrac{ax\ln(x) + x^3 - x}{2(1-x)} & \text{si } x \neq 1 \end{cases}, \quad \text{où } a \in \mathbb{R}.$$

Exercice 3 : Etude d'une marche aléatoire

Partie I - Calcul des probabilités

1. • Comme pour $n = 0$, le pion se trouve sur le point A, on a $p_0 = 1$ et $q_0 = r_0 = 0$.
   • D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_{A_n}(A_{n+1}) = 1/2$ et $P_{A_n}(B_{n+1}) = P_{A_n}(C_{n+1}) = 1/4$, donc, comme $\Omega = A_0$,

$$\begin{aligned} p_1 &= P(A_1) = P(A_0 \cap A_1) = P(A_0)P_{A_0}(A_1) = 1 \times 1/2 = 1/2 \\ q_1 &= P(B_1) = P(A_0 \cap B_1) = P(A_0)P_{A_0}(B_1) = 1 \times 1/4 = 1/4 \\ r_1 &= P(C_1) = P(A_0 \cap C_1) = P(A_0)P_{A_0}(C_1) = 1 \times 1/4 = 1/4, \end{aligned}$$

2. D'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = 1/2 \quad \text{et} \quad P_{B_n}(A_{n+1}) = P_{C_n}(A_{n+1}) = 1/4.$$

D'où, d'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (A_n, B_n, C_n),

$$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4}(q_n + r_n).$$

Cette formule reste valable si p_n, q_n ou r_n est nul. De même, on a

$$q_{n+1} = \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{4}(p_n + r_n) \quad \text{et} \quad r_{n+1} = \frac{1}{2}r_n + \frac{1}{4}(p_n + q_n).$$

Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$MV_n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2p_n + q_n + r_n \\ p_n + 2q_n + r_n \\ p_n + q_n + 2r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ q_{n+1} \\ r_{n+1} \end{pmatrix} = V_{n+1}.$$

3. • Montrons par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = M^n V_0$ (HR_n).
Initialisation : Pour $n = 0$, on a $M^0 = I$, donc on a bien $M^0 V_0 = IV_0 = V_0$. On a donc bien HR_0.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons HR_n vérifiée.
Alors $V_{n+1} = MV_n \underset{HR_n}{=} MM^nV_0 = M^{n+1}V_0$, donc on a bien HR_{n+1}.
Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = M^n V_0$.
• Par suite, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$V_n = M^n V_0 = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3 \cdot 4^n}\begin{pmatrix} 4^n + 2 \\ 4^n - 1 \\ 4^n - 1 \end{pmatrix}, \quad \text{donc} \quad \begin{cases} p_n = \dfrac{1}{3 \cdot 4^n}(4^n + 2) \\ \\ q_n = r_n = \dfrac{1}{3 \cdot 4^n}(4^n - 1) \end{cases}.$$

4. On a donc $p_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3 \cdot 4^n} \underset{n\to+\infty}{\to} \dfrac{1}{3}$ et $q_n = r_n = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3 \cdot 4^n} \underset{n\to+\infty}{\to} \dfrac{1}{3}$.
On peut en déduire que, après un grand nombre d'étapes, les trois emplacements sont presque équiprobables.

Partie II - Nombre moyen de passages en A

5. La variable aléatoire $X_1 + \ldots + X_n$ représente le nombre de passage du pion en A entre l'étape 1 et l'étape n.
$E(X_1 + \ldots + X_n)$ représente le nombre moyen de passages du pion en A entre l'étape 1 et l'étape n.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre p_n, donc X_n admet une espérance et $E(X_n) = p_n$.
7. $X_1 + \ldots + X_n$ admet donc une espérance comme combinaison linéaire de variables admettant une espérance et, par linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned} a_n = E(X_1 + \ldots + X_n) &= \sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \sum_{k=1}^{n} p_k \\ &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3 \cdot 4^k}\right) \quad \text{(d'après la question 3)} \\ &= \frac{n}{3} + \frac{2}{12}\frac{1 - (1/4)^n}{1 - (1/4)} \\ &= \frac{n}{3} + \frac{2}{9}(1 - (1/4)^n). \end{aligned}$$

Partie III - temps d'attente avant le premier passage en B

8. Comme le pion se trouve en A à l'étape 0, on a

$$\begin{aligned} & P(T_B = 1) = P(B_1) = 1/4 \\ \text{et} \quad & P(T_B = 2) = P((A_1 \cup C_1) \cap B_2) = P(A_1 \cap B_2) + P(C_1 \cap B_2) \quad \text{(incompatibles)} \\ & \qquad = P(A_1)P_{A_1}(B_2) + P(C_1)P_{C_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}. \end{aligned}$$

9. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\overline{B_n} = A_n \cup C_n$, car (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements.

10. On a $\overline{B_2} \cap \overline{B_1} = (A_2 \cap \overline{B_1}) \cup (C_2 \cap \overline{B_1})$, donc

$$\begin{aligned}
P(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1}) &= P\big((B_3 \cap A_2 \cap \overline{B_1}) \cup (B_3 \cap C_2 \cap \overline{B_1})\big) \\
&= P(B_3 \cap A_2 \cap \overline{B_1}) + P(B_3 \cap C_2 \cap \overline{B_1}) \quad \text{(incompatibles)} \\
&= P(A_2 \cap \overline{B_1}) P_{A_2 \cap \overline{B_1}}(B_3) + P(C_2 \cap \overline{B_1}) P_{C_2 \cap \overline{B_1}}(B_3) \\
&= P(A_2 \cap \overline{B_1}) \times \frac{1}{4} + P(C_2 \cap \overline{B_1}) \times \frac{1}{4} \\
&= \frac{1}{4}\big(P(A_2 \cap \overline{B_1}) + P(C_2 \cap \overline{B_1})\big) \\
&= \frac{1}{4} P\big((A_2 \cap \overline{B_1}) \cup (C_2 \cap \overline{B_1})\big) \quad \text{(incompatibles)} \\
&= \frac{1}{4} P(\overline{B_2} \cap \overline{B_1}),
\end{aligned}$$

donc $P(B_3 | \overline{B_2} \cap \overline{B_1}) = \dfrac{P(B_3 \cap \overline{B_2} \cap \overline{B_1})}{P(\overline{B_2} \cap \overline{B_1})} = \dfrac{1}{4}$.

11. • Pour tout $k \geq 3$,

$$\begin{aligned}
P(T_B = k) &= P(\overline{B_1} \cap \overline{B_2} \cap \ldots \cap \overline{B_{k-1}} \cap B_k) \\
&= P(\overline{B_1}) \times \prod_{i=1}^{k-2} P_{\overline{B_1} \cap \ldots \cap \overline{B_i}}(\overline{B_{i+1}}) \times P_{\overline{B_1} \cap \ldots \cap \overline{B_{k-1}}}(B_k) \\
&= \frac{3}{4} \times \prod_{i=1}^{k-2} \big(1 - P_{\overline{B_1} \cap \ldots \cap \overline{B_i}}(B_{i+1})\big) \times \frac{1}{4} \\
&= \frac{3}{4} \times \prod_{i=1}^{k-2} \left(\frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}.
\end{aligned}$$

Cette formule est encore valable pour $k = 1$ et $k = 2$ d'après les expressions trouvées en 8, donc on a :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(T_B = k) = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}.$$

• Comme $(T_B = k)_{k \in \mathbb{N}}$ forme un système complet d'événements, on a

$$P(T_B = 0) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(T_B = k) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} = 1 - \frac{1}{4} \times \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} = 0 \quad \text{(série géométrique de raison } 3/4 \in]-1, 1[\text{)}.$$

12. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(1/4)$.
Alors X et T_B ont la même série génératrice, donc, comme X admet une espérance, T_B aussi et

$$E(T_B) = E(X) = \frac{1}{1/4} = 4.$$