E3A1 2018 - Corrigé

Exercice 1

1. $F = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle\} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i \times 1 = 0\} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = 0\}$.

2. Soit $f : \vec{x} \in \mathbb{R}^n \mapsto \langle \vec{x}, \vec{u} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i$.
f est une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, non nulle car $f(\vec{u}) = n \neq 0$.
De plus, $F = \ker f$ et $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}$, espace vectoriel de dimension 1, et, comme $\operatorname{Im} f \neq \{0\}$, on a donc $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}$.
D'après le théorème du rang, on a
$$\dim F = \dim \ker f = \dim \mathbb{R}^n - \dim \operatorname{Im}(f) = n - 1.$$

3. Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormale.
Autrement dit, si $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, alors il existe une matrice P orthogonale et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PD\,{}^tP$.
La matrice A_n est symétrique réelle, dont il existe une matrice P orthogonale et une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $A_n = PD\,{}^tP$.

4. Comme $\vec{x} \in F$, $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$. On a donc :
$$A_n X = \begin{pmatrix} \sum_{i=2}^{n} x_i \\ \vdots \\ \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} x_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n-1} x_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_j \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix} = -X.$$

5. • Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned}
\chi_{A_n}(X) = \det(XI - A_n) &= \begin{vmatrix} X-(n-1) & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ X-(n-1) & X & -1 & \cdots & -1 \\ X-(n-1) & -1 & \ddots & \ddots & -1 \\ X-(n-1) & -1 & \ddots & X & -1 \\ X-(n-1) & -1 & \cdots & -1 & X \end{vmatrix} \quad \left(C_1 \leftarrow \sum_{i=1}^{n} C_i\right) \\
&= (X-n+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & X & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & -1 & \ddots & \ddots & -1 \\ 1 & -1 & \ddots & X & -1 \\ 1 & -1 & \cdots & -1 & X \end{vmatrix} \\
&= (X-n+1) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & X+1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & X+1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & X+1 \end{vmatrix} \quad (L_i \leftarrow L_i - L_1, \forall i \in [\![2, n]\!]) \\
&= (X-n+1)(X+1)^{n-1}
\end{aligned}$$
Par suite, $\boxed{\operatorname{Sp}(A_n) = \{-1, n-1\}.}$
• Comme A_n est diagonalisable, on a $\dim E_{n-1}(A_n) = 1$ et $\dim E_{-1}(A_n) = n - 1$.
• Notons $(E_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Pour tout $j \in [\![2,n]\!]$, $A_n(E_j - E_1) = E_1 - E_j = -(E_j - E_1)$, donc $E_j - E_1 \in E_{-1}(A_n)$.
La famille $(E_j - E_1)_{j\in[\![2,n]\!]}$ est une famille libre (zéros échelonnés), composée de $n-1$ de $E_{-1}(A_n)$, donc c'est une base de $E_{-1}(A_n)$ et

$$E_{-1}(A_n) = \mathrm{Vect}(E_j - E_1)_{j\in[\![2,n]\!]}.$$

• $A_n \begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = (n-1)\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} \in E_{n-1}(A_n)$, et, comme $\dim E_{n-1}(A_n) = 1$, $\left(\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix}\right)$ est une base de $E_{n-1}(A_n)$.

6. $\det(A_n) = (-1)^n det(-A_n) = (-1)^n \chi_{A_n}(0) = (-1)^n(1-n)$.
7. Comme ${}^tB_n = \begin{pmatrix}{}^tA_n & {}^tI_n\\ {}^tI_n & {}^tA_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A_n & I_n\\ I_n & A_n\end{pmatrix} = B_n$, B_n est symétrique réelle, donc diagonalisable.
8. Soit α une valeur propre de la matrice B_n et $X = \begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix}$ une matrice colonne écrite par blocs telle que $X \neq 0$ et $B_nX = \alpha X$.
Alors on a
$$\alpha\begin{pmatrix}X_1\\ X_2\end{pmatrix} = B_nX = \begin{pmatrix}A_nX_1 + X_2\\ X_1 + A_nX_2\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}A_nX_1 + X_2 = \alpha X_1\\ X_1 + A_nX_2 = \alpha X_2\end{cases}.$$
On a donc, en faisant $L_1 + L_2$: $(A_n + I)(X_1 + X_2) = \alpha(X_1 + X_2)$
et, en faisant $L_1 - L_2$: $(A_n - I)(X_1 - X_2) = \alpha(X_1 - X_2)$.
Comme $X \neq 0$, on a
– $X_1 + X_2 \neq 0$, et $X_1 + X_2$ est alors un vecteur propre de $A_n + I$ associé à la valeur propre α
– $\boxed{\text{ou}}$ $X_1 - X_2 \neq 0$, et $X_1 - X_2$ est alors un vecteur propre de $A_n + I$ associé à la valeur propre α
α est donc bien une valeur propre de $(A_n + I_n)$ ou $(A_n - I_n)$.
9. • Pour tout $a \in \mathbb{R}$, pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
$$\chi_{A-aI}(X) = \det(XI - (A - aI)) = \det((X + a)I - A) = \chi_A(X + a),$$
donc
$$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A - aI) = \{x \in \mathbb{R} : \chi_{A-aI}(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R} : \chi_A(x + a) = 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x + a \in \mathrm{Sp}(A)\} = \{\lambda - a, \lambda \in \mathrm{Sp}(A)\}.$$
Par suite, $\mathrm{Sp}(A_n - I) = \{\lambda - 1, \lambda \in \mathrm{Sp}(A_n)\} = \{-2, n-2\}$ et $\mathrm{Sp}(A_n + I) = \{\lambda + 1, \lambda \in \mathrm{Sp}(A_n)\} = \{0, n\}$
Comme, d'après la question précédente, $\mathrm{Sp}(B_n) \subset \mathrm{Sp}(A_n - I) \cup \mathrm{Sp}(A_n + I)$, on a bien $\mathrm{Sp}(B_n) \subset \{-2, 0, n-2, n\}$.
10. • D'après la question 8, en prenant $X_1 = X_2$ un vecteur propre de A_n associé à la valeur propre λ, $X = \begin{pmatrix}X_1\\ X_1\end{pmatrix} \neq 0$ et
$$B_nX = \begin{pmatrix}A_nX_1 + X_1\\ X_1 + A_nX_1\end{pmatrix} = (\lambda + 1)\begin{pmatrix}X_1\\ X_1\end{pmatrix} = (\lambda + 1)X,$$
donc X est un vecteur propre de B_n associé à la valeur propre $\lambda + 1$.
Par suite, $-1 + 1 = 0$ et $(n-1) + 1 = n$ sont valeurs propres de B_n.
• Soit X_1 et un vecteur propre de A_n associé à la valeur propre λ. Alors $X = \begin{pmatrix}X_1\\ -X_1\end{pmatrix} \neq 0$ et
$$B_nX = \begin{pmatrix}A_nX_1 - X_1\\ X_1 - A_nX_1\end{pmatrix} = (\lambda - 1)\begin{pmatrix}X_1\\ -X_1\end{pmatrix} = (\lambda - 1)X,$$
donc X est un vecteur propre de B_n associé à la valeur propre $\lambda - 1$.
Par suite, $-1 - 1 = -2$ et $(n-1) - 1 = n-2$ sont valeurs propres de B_n.
• On a donc $\{-2, 0, n-2, n\} \subset \mathrm{Sp}(B_n)$, donc, par double inclusion,
$$\mathrm{Sp}(B_n) = \{-2, 0, n-2, n\}.$$
11. Les raisonnements des questions 8 et 10 n'utilisent pas le caractère symétrique de A_n, donc restent valables pour une matrice M quelconque.
On a donc $\mathrm{Sp}(U_M) = \mathrm{Sp}(M + I) \cup \mathrm{Sp}(M - I) = \{\lambda \pm 1,\ \lambda \in \mathrm{Sp}(M)\}$.
12. Comme M est diagonalisable, il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible et D diagonale telles que $M = PDP^{-1} \Leftrightarrow D = P^{-1}MP$.
La matrice par blocs $Q = \begin{pmatrix}P & P\\ P & -P\end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse $Q^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix}P^{-1} & P^{-1}\\ P^{-1} & -P^{-1}\end{pmatrix}$.
De plus, par produit matriciel par blocs,
$$\begin{aligned}Q^{-1}U_MQ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}P^{-1}MP + P^{-1}IP + P^{-1}MP + P^{-1}IP & P^{-1}MP + P^{-1}IP - (P^{-1}MP + P^{-1}IP)\\ P^{-1}MP - P^{-1}IP - (P^{-1}MP - P^{-1}IP) & P^{-1}MP - P^{-1}IP + P^{-1}MP - P^{-1}IP\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2D + 2I & 0\\ 0 & 2D - 2I\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}D + I & 0\\ 0 & D - I\end{pmatrix}\end{aligned}$$
est diagonale, donc U_M est diagonalisable.

Remarque. Pour trouver Q, on s'inspire de la question 9 : des vecteurs propres de U_M seront de la forme $\begin{pmatrix} X_1 \\ X_1 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} X_1 \\ -X_1 \end{pmatrix}$ où X_1 est un vecteur propre de M.

Comme les colonnes de P sont des vecteurs propres de M, les colonnes de $\begin{pmatrix} P \\ P \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} P \\ -P \end{pmatrix}$ seront des vecteurs propres de U_M... d'où le choix de Q.

Exercice 2

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$$h_{2n} - h_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}.$$
Or, pour tout $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, $\dfrac{1}{k} \geq \dfrac{1}{2n}$, donc
$$h_{2n} - h_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n\frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

2. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_{n+1} - h_n = \dfrac{1}{n+1} \geq 0$, donc la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
Par suite, la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ admet une limite ℓ (éventuellement infinie) en $+\infty$.
• Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_{2^n} \geq \dfrac{n}{2}$ (HR_n)
Initialisation : $h_{2^0} = h_1 = 1 \geq \dfrac{0}{2}$, donc on a bien HR_0.
Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons HR_n vérifiée.
Alors, d'après la question 1, comme $2^n \geq 1$, on a
$$h_{2^{n+1}} \geq \frac{1}{2} + h_{2^n} \geq \frac{1}{2} + \frac{n}{2} = \frac{n+1}{2}.$$
On a bien HR_{n+1}.
Conclusion : D'où, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $h_{2^n} \geq \dfrac{n}{2}$.
• Par suite, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} h_{2^n} = +\infty$.
Comme $(h_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de (h_n), on a aussi $\lim h_{2^n} = \ell$.
D'où, par unicité de la limite, on a $\ell = +\infty$, i.e. $\boxed{\displaystyle\lim_{n\to+\infty} h_n = +\infty.}$

3. • Pour $x = 1$, $h_n x^n \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$, donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} h_n x^n$ diverge grossièrement. Par suite, $R < 1$.
• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$|h_n| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{n} 1 = n.$$
Or, $\displaystyle\sum_{n\geq 1} x^n$ a pour rayon de convergence 1, donc $\displaystyle\sum_{n\geq 1} nx^n$ a pour rayon de convergence 1, donc $H(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 1} h_n x^n$ a un rayon de convergence supérieur ou égal à 1.
• Par suite, le rayon de convergence de H est 1.
• Enfin, $\sum h_n x^n$ diverge pour $x = 1$ (premier point) et diverge aussi pour $x = -1$ (car $(-1)^n h_n$ n'a pas de limite, donc la série diverge grossièrement), donc $I =]-1, 1[$.
Remarque. Pour déterminer le rayon de convergence, on aurait aussi pu utiliser le critère de d'Alembert car, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h_n > 0$ et
$$\frac{h_{n+1}}{h_n} = \frac{\overbrace{h_n}^{\to+\infty} + \overbrace{\dfrac{1}{n+1}}^{\to 0}}{h_n} \sim \frac{h_n}{h_n} \underset{n\to+\infty}{\to} 1.$$
On retrouve (heureusement) le rayon de convergence égal à 1.

4. • Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n^2} > 0$ et

$$\frac{\dfrac{1}{(n+1)^2}}{\dfrac{1}{n^2}} \sim \frac{n^2}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\to} 1,$$

donc le rayon de convergence de S est $1/1 = 1$.

• Le rayon de convergence d'une série entière reste inchangé si l'on mutliplie ou divise ses coefficients par n, donc T a le même rayon de convergence que H, c'est-à-dire 1.

5. Pour tout $x \in]-1,1[$, $g(x) = \ln(1-x) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$.

Le rayon de convergence de cette série entière est 1.

6. $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$, $\dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ (le rayon de convergence de cette série entière est 1).

Par suite, $G : x \mapsto \ln(1-x) \times \dfrac{1}{1-x}$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ comme produit de fonctions développables en série entière sur $]-1,1[$.

De plus, $G(x)$ est le produit de Cauchy de $-\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ en posant $a_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ -1/n & \text{si } n > 0 \end{cases}$

et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ en posant $b_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par suite, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned} G(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{n} a_p b_{n-p} \right) x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{n} -\frac{1}{p} x^n \quad (\text{car } a_0 = 0) \\ &= -\sum_{n=1}^{+\infty} h_n x^n = -H(x). \end{aligned}$$

7. Comme L est la primitive de H sur l'intervalle $]-1,1[$ qui s'annulle en 0, on a

$$\begin{aligned} \forall x \in]-1,1[, \quad L(x) &= \int_0^x H(t)dt = \int_0^x -G(t)dt = \int_0^x \frac{-\ln(1-t)}{1-t} dt \\ &= \left[\frac{(\ln(1-t))^2}{2} \right]_0^x = \frac{(\ln(1-x))^2}{2}. \end{aligned}$$

On a donc, pour tout $x \in]-1,1[$, $L(x) = \dfrac{(g(x))^2}{2}$.

8. Deux façons de le justifier :
   - $L : x \mapsto \dfrac{1}{2} g(x) \times g(x)$ est développable en série entière sur $]-1,1[$ comme produit de fonctions développables en série entière.
   - L, primitive de H est développable en série entière sur $]-1,1[$ comme primitive d'une fonction développable en série entière.

   Le deuxième point permet de plus d'écrire : pour tout $x \in]-1,1[$,

$$L(x) = L(0) + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h_n}{n+1} x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h_n}{n+1} x^{n+1}.$$

9. Par suite, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned} (T-S)(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{h_n}{n} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn} \right) x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{kn} - \frac{1}{n^2} \right) x^n = 0 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{kn} \right) x^n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{h_{n-1}}{n} x^n \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{h_j}{j+1} x^{j+1} \quad (\text{en posant } j = n-1 \Leftrightarrow n = j+1) \\ &= L(x). \end{aligned}$$

10. Soit $y \in]0,1[$.

(a) • $\varphi : u \mapsto \dfrac{\ln(1-u)}{u}$ est continue sur $]0,y]$ et

$$\frac{\ln(1-u)}{u} \underset{u\to 0}{\sim} \frac{-u}{u} \to -1,$$

donc elle est prolongeable par continuité en 0 (en posant $\varphi(0)=-1$), donc intégrable sur $]0,y]$.
$\displaystyle\int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u}du$ est donc bien (en particulier) une intégrale convergente.

• Pour tout $u \in]-1,1[$, $\ln(1-u) = -\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u^n}{n}$, donc, pour tout $u \in]-1,1[\setminus\{0\}$,

$$\varphi(u) = \frac{\ln(1-u)}{u} = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{u^{n-1}}{n} = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u^n}{n+1}.$$

Cette égalité est encore valable pour $u=0$ (on a posé $\varphi(0)=-1$), donc φ est développable en série entière sur $]-1,1[$ et, pour tout $u\in]-1,1[$, $\varphi(u) = -\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u^n}{n+1}$.

Par suite, pour tout $y \in]0,1[$, la série de fonctions continues $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u^n}{n+1}$ converge uniformément sur $[0,y]$, donc on peut intervertir $\displaystyle\int$ et $\displaystyle\sum$:

$$\int_0^y \varphi(u)du = \int_0^y -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{u^n}{n+1}du = -\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^y \frac{u^n}{n+1}du = -\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{y^{n+1}}{(n+1)^2} = -S(y) \quad \text{(en changeant de variable).}$$

On a donc bien

$$\int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u}du + S(y) = 0.$$

(b) • Formellement,

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}du = \lim_{y\to 1}\int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u}du = -\lim_{y\to 1} S(y) = -S(1) = -\frac{\pi^2}{6}.$$

• Montrons donc que $\displaystyle\lim_{y\to 1} S(y) = S(1)$.
Posons $f_n : x \in [0,1] \mapsto \dfrac{1}{n^2}x^n$.
Pour tout $x \in [0,1]$, $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{n^2}$, donc $\|f_n\|_\infty^{[0,1]} \leq \dfrac{1}{n^2}$.
Or, $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n^2}$ converge (Riemann et $2>1$), donc, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geq1}\|f_n\|_\infty^{[0,1]}$ converge, donc la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement, donc uniformément, sur $[0,1]$.
De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[0,1]$, donc $S = \displaystyle\sum_{n\geq 1} f_n$ est continue sur $[0,1]$ comme somme d'une série de fonctions continues convergeant uniformément sur $[0,1]$.
Par suite, on a, par continuité de S en 1, $\displaystyle\lim_{y\to 1} S(y) = S(1)$.

• Pour tout $y \in [0,1[$,

$$\int_0^y \frac{\ln(1-u)}{u}du = -S(y) \underset{y\to 1}{\to} -S(1) = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = -\frac{\pi^2}{6},$$

donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}du$ converge et $\boxed{\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-u)}{u}du = -\frac{\pi^2}{6}.}$

(c) Pour tout $y\in]0,1[$, $1-y\in]0,1[$, donc, d'après la question 10a

$$S(1-y) = -\int_0^{1-y}\frac{\ln(1-u)}{u}du.$$

Posons le changement de variable affine $t = 1-u \Leftrightarrow u = 1-t$ (ce changement de variable est $\mathcal{C}^1$ strictement décroissant sur $]0,y[$)
On a $du = -dt$ et, comme l'intégrale définissant $S(1-y)$ converge,

$$S(1-y) = -\int_1^y \frac{\ln(t)}{1-t}(-dt) = \int_1^y \frac{\ln(t)}{1-t}dt.$$

Posons $u(t) = \ln t$, $u'(t) = \dfrac{1}{t}$, $v'(t) = \dfrac{1}{1-t}$, $v(t) = -\ln(1-t)$.
Alors u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, y[$.
$u(t)v(t) = -\ln(1+(t-1))\ln(1-t) \underset{t\to 1}{\sim} (1-t)\ln(1-t) \underset{t\to 0}{\to} 0$ par croissances comparées (avec $1-t \to 0$)
et $\lim\limits_{t\to y} u(t)v(t) = -\ln(y)\ln(1-y)$.
Enfin, l'intégrale définissant $S(1-y)$ converge, donc on peut intégrer par parties et :

$$\begin{aligned} S(1-y) &= [-\ln(t)\ln(1-t)]_1^y + \int_1^y \frac{\ln(1-t)}{t}dt \\ &= -\ln(y)\ln(1-y) - \int_y^1 \frac{\ln(1-t)}{t}dt \\ &= -\ln(y)\ln(1-y) - \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}dt + \int_0^y \frac{\ln(1-t)}{t}dt \\ &= -\ln(y)\ln(1-y) + \frac{\pi^2}{6} - S(y) \quad \text{(d'après les questions 10b et 10a)} \end{aligned}$$

donc on a bien

$$\frac{\pi^2}{6} = S(y) + S(1-y) + \ln(y)\ln(1-y).$$

Cette relation est encore valable pour $y = 0$ et $y = 1$ car $S(0) = 0$, $S(1) = \dfrac{\pi^2}{6}$ et $\ln(y)\ln(1-y) = 0$ pour $y = 0$ et $y = 1$.

11. D'après la question 9,

$$T(1/2) = S(1/2) + L(1/2).$$

Or, d'après la question 7, $L(1/2) = \dfrac{(\ln(1/2))^2}{2}$ et, d'après la question 10c, avec $y = 1/2$, on a

$$2S(1/2) = \frac{\pi^2}{6} - (\ln(1/2))^2, \quad \text{donc} \quad S(1/2) = \frac{\pi^2}{12} - \frac{(\ln(1/2))^2}{2}.$$

On a donc

$$\boxed{T(1/2) = S(1/2) + L(1/2) = \frac{\pi^2}{12}.}$$

Exercice 3

1. Soit k dans $\mathbb{N}^*$.
Effectuons une comparaison somme/intégrale.
• Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$ pour tout $x \in [\![i, i+1]\!]$, $i^k \leq x^k$.
D'où, par positivité de l'intégrale ($i \leq i+1$), on a

$$\int_i^{i+1} i^k dx \leq \int_i^{i+1} x^k dx \quad \text{i.e.} \quad i^k \leq \int_i^{i+1} x^k dx.$$

En sommant ces inégalités pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, et en utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$S_n(k) = \sum_{i=1}^n i^k \leq \sum_{i=1}^n \int_i^{i+1} x^k dx = \int_1^{n+1} x^k dx = \frac{(n+1)^{k+1} - 1}{k+1}.$$

• Pour tout $i \geq 2$ pour tout $x \in [\![i-1, i]\!]$, $x^k \leq i^k$.
D'où, par positivité de l'intégrale ($i - 1 \leq i$), on a

$$\int_{i-1}^i x^k dx \leq \int_{i-1}^i i^k dx \quad \text{i.e.} \quad \int_{i-1}^i x^k dx \leq i^k.$$

En sommant ces inégalités pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, et en utilisant la relation de Chasles, on obtient :

$$\sum_{i=2}^n i^k \geq \sum_{i=1}^n \int_{i-1}^i x^k dx = \int_1^n x^k dx = \frac{n^{k+1} - 1}{k+1}.$$

En ajoutant 1 de part et d'autre, on obtient :

$$S_n(k) \geq 1 + \frac{n^{k+1} - 1}{k+1}.$$

• On a donc

$$1 + \frac{n^{k+1} - 1}{k+1} \leq S_n(k) \leq \frac{(n+1)^{k+1} - 1}{k+1}.$$

En divisant par $n^{k+1} > 0$, on a

$$\frac{1}{n^{k+1}} + \frac{1}{k+1}\left(1 - \frac{1}{n^{k+1}}\right) \leq \frac{1}{n^{k+1}} S_n(k) \leq \frac{1}{k+1}\left(\frac{(n+1)^{k+1}}{n^{k+1}} - \frac{1}{n^{k+1}}\right).$$

Or, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^{k+1}} = 0$ et $\frac{(n+1)^{k+1}}{n^{k+1}} \sim \frac{n^{k+1}}{n^{k+1}} \underset{n \to +\infty}{\to} 1$,
donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^{k+1}} + \frac{1}{k+1}\left(1 - \frac{1}{n^{k+1}}\right) = \frac{1}{k+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{k+1}\left(\frac{(n+1)^{k+1}}{n^{k+1}} - \frac{1}{n^{k+1}}\right)$, donc, d'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n^{k+1}} S_n(k) = \frac{1}{k+1}$.

2. Comme $X(\Omega)$ est fini, X admet une espérance. De plus,

$$\sum_{i=1}^{N} P(X \geq i) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=i}^{N} P(X = k) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{i=1}^{k} P(X = k) = \sum_{k=1}^{N} kP(X = k) = E(X).$$

3. Comme $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, N]\!])$, X_1 admet une espérance et une variance (donc un moment d'ordre 2) et

$$\begin{aligned}
E(X_1) &= \frac{N+1}{2} \\
V(X_1) &= \frac{N^2 - 1}{12} \\
E(X_1)^2 &= V(X_1) + (E(X_1))^2 \quad \text{(d'après K-H)} \\
&= \frac{N^2 - 1}{12} + \frac{N^2 + 2N + 1}{4} = \frac{4N^2 + 6N + 2}{12} = \frac{2N^2 + 3N + 1}{6}.
\end{aligned}$$

4. (a)
```
def simulX():
    return [random.randint(1,10) for i in range(100)]
```

   (b)
```
def REALIV():
    L = simulX()
    return [max(L[:i]) for i in range(100)]
```

5. Soit k dans $\mathbb{N}^*$ supérieur à 2.
   (a) Soit $i \in [\![1, N]\!]$.

$$\begin{aligned}
P(U_k \geq i) &= P(\min(X_1, \dots, X_k) \geq i) = P((X_1 \geq i) \cap \ldots \cap (X_k \geq i)) \\
&= P(X_1 \geq i) \times \cdots \times P(X_k \geq i) \quad \text{(indépendants)} \\
&= P(X_1 \geq i)^k \quad \text{(même loi)} \\
&= \left(\sum_{j=i}^{N} P(X_1 = j)\right)^k = \left(\sum_{j=i}^{N} \frac{1}{N}\right)^k = \left(\frac{N - i + 1}{N}\right)^k.
\end{aligned}$$

   (b) • On a, pour tout $k \in [\![1, N-1]\!]$, $V_{k+1} \geq V_k$, donc, dès que $V_{k_0} = 10$, on a $V_k = 10$ pour tout $k \in [\![k_0, 100]\!]$.
   • De plus, pour tout $k \in [\![1, N]\!]$,

$$\begin{aligned}
P(V_k = 10) &= 1 - P(V_k \leq 9) \\
&= 1 - P(X_1 \leq 9 \cap \ldots \cap X_k \leq 9) \\
&= 1 - P(X_1 \leq 9) \times \cdots \times P(X_k \leq 9) \quad \text{(indépendants)} \\
&= 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^k
\end{aligned}$$

   et cette quantité tend très vite vers 1, donc la suite (V_k) prend en général très vite la valeur 10.

(c) D'après la question 2,

$$\begin{aligned}
E(U_k) &= \sum_{i=1}^{N} P(U_k \geq i) = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{N-i+1}{N}\right)^k = \frac{1}{N^k}\sum_{i=1}^{N}(N-i+1)^k \\
&= \frac{1}{N^k}\sum_{j=1}^{N} j^k \quad \text{(en posant } j = N-i+1\text{)} \\
&= \frac{1}{N^k} S_k(N)
\end{aligned}$$

Comme, d'après la question 1, $\frac{1}{N^{k+1}} S_k(N) \underset{N\to+\infty}{\to} \frac{1}{k+1} \neq 0$, on a

$$S_k(N) \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{N^{k+1}}{k+1}, \quad \text{et donc} \quad E(U_k) = \frac{1}{N^k} S_k(N) \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{N}{k+1}.$$

6. (a) • Les variables X_i sont indépendantes.
En posant $f : x \mapsto N+1-x$, on a, pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, $Y_i = f(X_i)$, donc les variables $(Y_1, \ldots, Y_N)$ sont indépendantes.
• Pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, $X_i(\Omega) = [\![1, N]\!]$, donc $Y_i(\Omega) = (N+1-X_i)(\Omega) = [\![1, N]\!]$.
De plus, pour tout $k \in [\![1, N]\!]$,

$$P(Y_i = k) = P(N+1-X_i = k) = P(X_i = \underbrace{N+1-k}_{\in[\![1,N]\!]}) = \frac{1}{N},$$

donc $Y_i \hookrightarrow \mathcal{U}([\![1, N]\!])$.

(b) On a

$$\begin{aligned}
U_k &= \min(X_1, \ldots, X_k) = -\max(-X_1, \ldots - X_k) \\
&= N+1-\max(N+1-X_1, \ldots, N+1-X_k) \\
&= N+1-\max(Y_1, \ldots, Y_k) = N+1-V_k(Y),
\end{aligned}$$

donc, par linéarité de l'espérance,

$$E(U_k) = N+1-E(V_k(Y)), \quad \text{donc} \quad E(V_k(Y)) = N+1-E(U_k).$$

De plus, par propriété de la variance, comme $U_k = N+1-V_k(Y)$, on a

$$V(U_k) = (-1)^2 V(V_k(Y)), \quad \text{donc} \quad V(V_k(Y)) = V(U_k).$$

Enfin, comme les X_i et les Y_i suivent les mêmes conditions (d'indépendance et de loi), V_k et $V_k(Y)$ ont la même loi, donc la même espérance et la même variance, donc :

$$E(V_k) = N+1-E(U_k) \quad \text{et} \quad V(V_k) = V(U_k).$$

7. (a) $U_2 + V_2 = \min(X_1, X_2) + \max(X_1, X_2) = X_1 + X_2$ et $U_2V_2 = \min(X_1, X_2) \times \max(X_1, X_2) = X_1X_2$.

(b) Par suite,

$$V(U_2 + V_2) = V(X_1 + X_2) \underset{\text{ind}}{=} V(X_1) + V(X_2) = \frac{N^2-1}{6}$$

et

$$E(U_2V_2) = E(X_1X_2) \underset{\text{ind}}{=} E(X_1)E(X_2) = \frac{(N+1)^2}{4}.$$

(c) On a $V(U_2) = V(V_2)$ d'après la question 6b.
De plus,

$$V(U_2 + V_2) = V(U_2) + V(V_2) + 2\mathrm{Cov}(U_2, V_2),$$

donc

$$\begin{aligned}
2V(U_2) &= V(U_2 + V_2) - 2\mathrm{Cov}(U_2, V_2) = \frac{N^2-1}{6} - 2\frac{(N^2-1)^2}{36N^2} \\
&= \frac{3N^4 - 3N^2 - N^4 + 2N^2 - 1}{18N^2} = \frac{2N^4 - N^2 - 1}{18N^2},
\end{aligned}$$

$$\text{donc} \quad V(U_2) = V(V_2) = \frac{2N^4 - N^2 - 1}{36N^2}.$$

(d) $\rho_2(N) = \dfrac{\mathrm{Cov}(U_2, V_2)}{\sigma(U_2)\sigma(V_2)} = \dfrac{(N^2-1)^2}{2N^4 - N^2 - 1}$.

(e) $\rho_2(N) = \dfrac{(N^2-1)^2}{2N^4 - N^2 - 1} \underset{N\to+\infty}{\sim} \dfrac{N^4}{2N^4} \underset{N\to+\infty}{\to} \dfrac{1}{2}$.

8. (a) *Qui est ce N ici ? ? On va supposer que X est à valeurs dans $[\![1, N]\!]$...*
Comme $X(\Omega)$ est fini, X admet un moment d'ordre 2 et

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N}(2i-1)P(X \geq i) &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=i}^{N}(2i-1)P(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{N}\sum_{i=1}^{k}(2i-1)P(X=k) \\
&= \sum_{k=1}^{N}\left(P(X=k)\sum_{i=1}^{k}(2i-1)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{N}P(X=k)k\frac{1+(2k-1)}{2} \quad \text{(somme de termes d'une suite arithmétique de raison 2)} \\
&= \sum_{k=1}^{N}k^2P(X=k) = E(X^2).
\end{aligned}$$

(b) D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
E(U_k^2) &= \sum_{i=1}^{N}(2i-1)P(U_k \geq i) = \sum_{i=1}^{N}(2i-1)\left(\frac{N-i+1}{N}\right)^k \\
&= \frac{1}{N^k}\sum_{i=1}^{N}(2i-1)(N+1-i)^k = \frac{1}{N^k}\sum_{j=1}^{N}(2(N+1-j)-1)j^k \quad (\text{en posant } j = N+1-i) \\
&= \frac{1}{N^k}\left((2N+1)\sum_{j=1}^{N}j^k - 2\sum_{j=1}^{N}j^{k+1}\right) = \frac{1}{N^k}\left((2N+1)S_k(N) - 2S_{k+1}(N)\right).
\end{aligned}$$

(c) D'après la formule de K-H,

$$\begin{aligned}
V(U_k) &= E(U_k)^2 - (E(U_k))^2 \\
&= \frac{1}{N^k}\left((2N+1)S_k(N) - 2S_{k+1}(N)\right) - \left(\frac{1}{N^k}S_k(N)\right)^2
\end{aligned}$$

(d) D'après la question 1, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $S_k(N) \underset{N\to+\infty}{\sim} \dfrac{N^{k+1}}{k+1}$, donc $S_k(N) = \dfrac{N^{k+1}}{k+1} + o(N^{k+1})$.
Par suite,

$$\begin{aligned}
V(U_k) &= \frac{1}{N^k}\left((2N+1)S_k(N) - 2S_{k+1}(N)\right) - \left(\frac{1}{N^k}S_k(N)\right)^2 \\
&= \frac{1}{N^k}\left((2N+1)\left(\frac{N^{k+1}}{k+1} + o(N^{k+1})\right) - 2\frac{N^{k+2}}{k+2} + o(N^{k+2})\right) - \left(\frac{N}{k+1} + o(N)\right)^2 \\
&= \frac{1}{N^k}\left(2\frac{N^{k+2}}{k+1} + \frac{N^{k+1}}{k+1} + o(N^{k+1}) - 2\frac{N^{k+2}}{k+2} + o(N^{k+2})\right) - \frac{N^2}{(k+1)^2} + o(N^2) \\
&= \frac{1}{N^k}\left(2N^{k+2}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) + o(N^{k+2})\right) - \frac{N^2}{(k+1)^2} + o(N^2) \\
&= 2N^2\frac{1}{(k+1)(k+2)} + o(N^2) - \frac{N^2}{(k+1)^2} + o(N^2) \\
&= N^2\frac{k}{(k+1)^2(k+2)} + o(N^2) \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{k}{(k+1)^2(k+2)}N^2.
\end{aligned}$$