

Rq : pour tout le chapitre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Par ailleurs, E et F désignent des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

I Questions de Révision pour se mettre en route

I.1 Espaces Vectoriels

- Donner la définition d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
- Dans cette question, on suppose que E est de dimensions finie $n \neq 0$.

- Qu'est-ce que cela veut dire ?
- Famille génératrice de E : définition ? Combien a-t-elle d'éléments ?
- Famille libre de E : définition ? Combien a-t-elle d'éléments ?

Application : On définit $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; $u_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $u_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ dans $\mathbb{R}^3$. Cette famille est-elle libre ?

- Donner la définition d'une base de E et toutes les caractérisations possibles.

Application : On définit $u = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $v = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ -1 \end{pmatrix}$; $w = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les coordonnées de $t = (1, -2, 1)$ dans la base $\mathcal{B}$.

- Quelle est la dimension de $\mathbb{K}_n[X]$?
Dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$? De $\mathcal{L}(E, F)$ si E et F sont de dimensions finies ?
Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 ?
Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants ?
Dimension de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants ?
- Définition et caractérisation d'un ss-ev de E .
Application : $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \text{ tel que } x - iy = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^3$ considéré comme un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel. En donner une base.
Déterminer une base de F en tant que $\mathbb{R}$ -ev.
- Dans E , supposé de dimension n :
 - que peut-on dire d'une famille de $n + 1$ vecteurs ?
 - que peut-on dire d'une famille de p vecteurs avec $p < n$?
- Quelle est la définition d'une application linéaire de E dans F ?
- Qu'est-ce qu'un isomorphisme ? Existe-t-il des isomorphismes de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$?
 - Qu'est-ce qu'un endomorphisme ? Exemple ?
 - Qu'est-ce qu'un automorphisme ? Exemple ?
 - Qu'est-ce qu'une forme linéaire ?
Application : $f : (x, y, z) \mapsto x + y + z$ est-elle une forme linéaire sur $\mathbb{K}^3$?
Même question avec $g : (x, y, z) \mapsto xyz$.
- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$, quel est son noyau ?, son image ?
 - Rapport avec l'injectivité ? la surjectivité ? la bijectivité ?
- Si f application linéaire, transforme une base en une base, alors elle est bijective.
 - Vrai ?
 - Faux ?
 - Ça dépend ...
- Même question avec "famille libre" au lieu de "base", avec "famille génératrice" ?
- La somme de 2 endomorphismes bijectifs est-elle bijective ? Si oui, démonstration. Si non, contre-exemple.
 - La composée de 2 endomorphismes bijectifs est-elle bijective ? Si oui, preuve. Si non, contre-exemple.
- Pour chacune des applications suivantes, montrer qu'elle est linéaire, déterminer son noyau, déterminer son image, donner sa matrice dans les bases canoniques concernées, dire si elle est injective, surjective, bijective...
 - $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $f(x, y, z) = (2x - y - z, -x + 2y + z)$
 - $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $g(x, y) = (4x + y, x - y, 2x + 3y)$
 - $h : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $h(x, y, z) = (-x + y - z, x - y + z, 2x - 2y + 2z)$

13. Soient f et g des endomorphismes de E .
 - (a) Y a-t-il un lien entre $\ker(g \circ f)$ et $\ker(g)$? Entre $\ker(g \circ f)$ et $\ker(f)$?
 - (b) Y a-t-il un lien entre $\text{Im}(g \circ f)$ et $\text{Im}(g)$? Entre $\text{Im}(g \circ f)$ et $\text{Im}(f)$?
 - (c) Que peut-on dire de $g \circ f = 0$?
14. Qu'est-ce qu'un hyperplan ? Que peut-on en dire en dimension finie ?
15. Si H est un hyperplan de E (de dimension finie) et D une droite non contenue dans H , alors $E = H \oplus D$. Vrai ou faux ?

I.2 Applications linéaires, calcul matriciel

1. Pour n et p entiers naturels non nuls, énoncer les propriétés qui font que $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
2. En connaissez-vous une base ? quelle est sa dimension ?
3. Qu'est-ce qu'une matrice carrée ? triangulaire supérieure ? triangulaire inférieure ? diagonale ?
4. Quelle est la dimension de l'espace des matrices triangulaires inférieures de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
5. Définition de la transposée d'une matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$?
6. Qu'est-ce qu'une matrice symétrique ? une matrice anti-symétrique ? exemples ?
Quelle est la dimension de l'espace des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
7. On peut toujours multiplier 2 matrices A et B entre elles : Vrai ? Faux ? Ça dépend ?
8. Ecriture matricielle du système : $(S) : \begin{cases} x - 2y - 3z + t = 6 \\ \sqrt{5}y + 3t = 0 \\ x + y + z + t = -3 \end{cases}$
9. Méthode du pivot de Gauss ? Résoudre le système (S) précédent.
10. Si $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$ et $A \times B = (c_{i,j})$ quelle est l'expression de $c_{i,j}$?
Application : en notant $I_n = (\delta_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ tel que $\delta_{ii} = 1$ et $\delta_{i,j} = 0$ pour $i \neq j$, montrer que I_n est l'élément neutre pour la multiplication de matrices.
11. La formule du binôme et les identités remarquables sont-elles encore valables ?
 $(A + B)^n = \dots ? \quad A^n - B^n = \dots ?$
Application : pour $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
12. Si D est une matrice diagonale que vaut D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$?
13. Définition du rang d'une matrice. Définition du noyau d'une matrice ($\text{Ker}(A)$). Y a-t-il une relation reliant ces 2 notions ?
Application : Soit $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 5}}$ tel que $a_{2,1} = 1$ et sinon $a_{i,j} = 0$. Construire A . Quel est son rang ? Déterminer $\text{Ker}(A)$.
14. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, donner la définition de A inversible.
Une matrice non carrée peut-elle être inversible ?
Caractérisations d'une matrice inversible (en pensant aux applications linéaires par exemple) ? Exemple de matrices inversibles ? de matrices non inversibles ?
15. L'inverse d'une matrice est unique : Vrai ? Faux ? Ça dépend ?
16. Que peut-on dire d'un système tel que la matrice de ses coefficients est inversible ?
Exemple : $\begin{cases} 2x + 4y - 4z = -8 \\ 3x + 9y - 6z = 9 \\ 4x + 17y - 11z = 41 \end{cases}$
17. Si $A^2 = 0$ alors
 - (a) $A = 0$?
 - (b) A est non inversible ?
18. (a) Si $A \times B$ existe, que vaut sa transposée ?
(b) Si A est inversible, est-ce le cas de sa transposée ? que vaut la transposée de A^{-1} ?

II Rappels sur espaces vectoriels

Définition 1 $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

Un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel est un espace $(E, +, \cdot)$ (non vide) muni d'une **loi interne** $+$ et d'une **loi externe** $\cdot$ vérifiant :

1. $\forall (u, v, w) \in E^3, u + (v + w) = (u + v) + w$
2. $\forall (u, v) \in E^2, u + v = v + u$
3. $\exists 0_E \in E / \forall u \in E, u + 0_E = u$
4. $\forall u \in E, \exists !(-u) \in E / u + (-u) = 0_E$
5. $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall (u, v) \in E^2, \alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v$
6. $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall u \in E, (\alpha + \beta) \cdot u = \alpha \cdot u + \beta \cdot u$
7. $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2, \forall u \in E, \alpha \cdot (\beta \cdot u) = (\alpha\beta) \cdot u$
8. $\forall u \in E, 1 \cdot u = u$

Remarque 1 $\forall (\lambda, u) \in \mathbb{K} \times E, \lambda \cdot u = 0_E \iff (\lambda = 0 \text{ ou } u = 0_E)$

Exemples fondamentaux de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels : $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}[X], \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \mathbb{K}^{\Omega}, \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), \mathcal{F}(I, \mathbb{R}), \mathcal{C}^n(I, \mathbb{R}^p) \dots$

Si A est un ensemble non vide et V un $\mathbb{K}$ -E.V. alors $\overline{E} = \mathcal{F}(A, V)$ est un $\mathbb{K}$ -E.V., lorsqu'on le munit des lois suivantes, : $\forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall (f, g) \in E^2, f + g : x \mapsto$ et αf en posant, pour tout $x \in A : (f + g)(x) = f(x) + g(x)$ et $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot (f(x))$.

Sous-espace nul. Droite vectorielle. Plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ Sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$.

Définition 2 Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit $F \subset E$.

On dit que F est un **sous-espace vectoriel** de E si F est non vide et stable par les lois $+$ et $\cdot$.

Proposition 1 Soit $F \subset E$. Alors F est un sous-espace vectoriel de E **si et seulement si** :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{i) } 0_E \in F \\ \text{ii) } \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (u, v) \in F^2, u + \lambda \cdot v \in F \end{array} \right\} \text{ ou bien } \left\{ \begin{array}{l} \text{i) } F \neq \emptyset \\ \text{ii) } \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (u, v) \in F^2, u + v \in F \text{ et } \lambda \cdot v \in F \end{array} \right\}$$

Proposition 2 Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Alors la restriction des lois de E à F confèrent à $(F, +, \cdot)$ une structure d'espace vectoriel.

Exemples fondamentaux de sous-espaces vectoriels : l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène est un SEV des $\mathbb{K}^n$, l'ensemble des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène est un SEV de

Définition 3 Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille (finie) de vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -ev E .

L'ensemble des combinaisons linéaires de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est noté $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$.

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \{ \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n / (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \}$$

Proposition 3 $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ est un **sous-espace vectoriel** de E .

On dit que $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ est le sous-espace engendré par la famille $(x_1, \dots, x_n)$.

Tout sous-espace vectoriel contenant les x_i contient $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$.

Remarque 2 Si $u_n \in \text{Vect}(u_1, \dots, u_{n-1})$ alors $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_{n-1})$.

Proposition 4 L'**intersection** de sous-espaces vectoriels $F_1, \dots, F_n$ de E est un sous-espace vectoriel de E .

Par exemple si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E , alors $F \cap G$ aussi.

Proposition 5 Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E . On définit alors la **somme** de F et G par :

$$F + G = \{ u + v / (u, v) \in F \times G \}$$

La somme $F + G$ est un **sous-espace vectoriel** de E .

Remarque 3 En pratique : $x \in F + G \iff \exists (u, v) \in F \times G / x = u + v$.

Définition 4 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E .

La somme $F + G$ est **directe** et notée $F \oplus G$ lorsque tout vecteur $\vec{x}$ de $F + G$ s'écrit de manière unique sous la forme $\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ où $u \in F$ et $v \in G$.

De manière équivalente, $F + G = F \oplus G$ lorsque $\left\{ \begin{array}{l} u + v = \vec{0}_E \\ u \in F \quad v \in G \end{array} \right\} \implies \left\{ \begin{array}{l} u = v = \vec{0}_E \end{array} \right\}$.

Proposition 6 Caractérisation d'une somme directe. Soient F, G deux sous-espaces vectoriels de E . Alors

$$(F + G = F \oplus G) \iff F \cap G = \{\vec{0}_E\}.$$

Définition 5 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F, G deux sous-espaces vectoriels de E .

F et G sont dits **supplémentaires dans** E lorsque $F \oplus G = E$ (la somme $F + G$ est directe et $F + G = E$), ce qui s'écrit :

$$\forall x \in E, \exists!(u, v) \in F \times G / x = u + v.$$

Définition 6 Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs. On dit que $(x_1, \dots, x_n)$ est libre si pour tous scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, on a :

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_n x_n = 0 \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0.$$

Une famille qui n'est **pas libre** est dite liée.

Remarque 4

Si la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est libre on dit aussi que $x_1, \dots, x_n$ sont linéairement indépendants.

Si $\vec{x}$ est un vecteur non nul, la famille $(\vec{x})$ est libre.

La famille (x, y) est liée SSI : $x = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{K}$, tel que $y = \lambda x$. Les vecteurs x et y sont alors dits « colinéaires ».

Toute famille contenant le vecteur nul 0_E est liée.

Toute "sous-famille" d'une famille libre est libre.

Toute "sur-famille" d'une famille liée est liée.

Proposition 7 Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs. Alors :

$(x_1, \dots, x_n)$ est **liée si et seulement si un** (au moins) des vecteurs est **combinaison linéaire** des autres.

Proposition 8 Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une **famille libre** et x_{n+1} un vecteur. Alors :

$$(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \text{ est libre } \iff x_{n+1} \notin \text{Vect}(x_1, \dots, x_n).$$

Proposition 9 Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts :

Une famille finie de polynômes **non nuls** et de **degrés échelonnés** est libre.

Définition 7 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une famille de vecteurs de E .

On dit que $(x_1, \dots, x_n)$ est génératrice de E si $E = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, c'est-à-dire si tout $x \in E$ est combinaison linéaire de la famille $(x_1, \dots, x_n)$.

Remarque 5 Toute "sur-famille" d'une famille génératrice est génératrice.

Définition 8 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On dit que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E si $(e_1, \dots, e_n)$ est **libre et génératrice** dans E .

Théorème-Definition 1 Supposons que $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ soit une base de E . Alors tout vecteur x de E se décompose de façon unique dans la base $\mathcal{B}$:

$$\forall x \in E, \exists!(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n / x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n.$$

Les scalaires $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont appelés les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

Exemples importants : bases **canoniques** des $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Proposition 10 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et F, G deux sous-espaces en **somme directe**.

Soit $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ des bases respectives de F et de G . Alors la famille $\mathcal{B}$ obtenue par concaténation des bases $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ est une **base** de $F \oplus G$. On dit que cette base est adaptée à la somme directe $F \oplus G$.

En particulier si F et G sont **supplémentaires** dans E alors $\mathcal{B}$ est une base de E .

Proposition 11 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ une famille **libre** de E .
Posons $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $G = \text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$. Alors F et G sont en **somme directe**.

Remarque 6 En particulier, en reprenant les mêmes notations : si $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ est une **base** de E alors F et G sont **supplémentaires** dans E .

Définition 9 Un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel est dit de dimension finie lorsqu'il admet une **famille génératrice finie**.

Théorème 1 **Théorème de la base extraite** Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non réduit à $\{0\}$ et de dimension finie. Alors de toute famille génératrice (finie) de E , on peut extraire une base.

Par conséquent tout $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non réduit $\{0\}$ et de dimension finie admet une base.

Proposition 12 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel engendré par une famille de n vecteurs.
Alors toute famille de $n + 1$ vecteurs de E est **liée**.

Proposition 13 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Alors :

1. Toutes les bases de E ont le même cardinal, appelé dimension de E .
2. Toutes les familles libres de E ont un cardinal **inférieur ou égal** à $\dim(E)$.
3. Toutes les familles génératrices de E ont un cardinal **supérieur ou égal** à $\dim(E)$.

Remarque 7 Dimension de $\mathbb{K}^n$?

Dimension de $\mathbb{K}_n[X]$?

Dimension de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$? De $\mathcal{L}(E, F)$ si E et F sont de dimensions finies ?

Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 ?

Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants ?

Dimension de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants ?

Théorème 2 **Théorème de caractérisation des bases** Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E . Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\mathcal{F}$ est une base
2. $\mathcal{F}$ est libre et $\text{card}(\mathcal{F}) = n$
3. $\mathcal{F}$ est génératrice et $\text{card}(\mathcal{F}) = n$

Remarque 8 Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $K_n[X]$: si $P_0, \dots, P_n$ sont des polynômes non nuls et de degrés échelonnés dans $\mathbb{K}_n[X]$, c'est une famille libre de $\mathbb{K}_n[X]$.

C'est de plus une famille de $n + 1$ polynômes dans un espace de dimension $n + 1$, donc c'est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Théorème 3 **Théorème de la base incomplète** Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Alors toute famille libre de E peut être complétée en une base.

Autrement dit : si $(e_1, \dots, e_k)$ est une famille libre de E (avec $k \leq n$) alors il existe $n - k$ vecteurs $e_{k+1}, \dots, e_n$ tels que $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E .

Remarque 9 Les vecteurs ajoutés peuvent être choisis parmi les vecteurs d'une famille génératrice donnée.

Définition 10 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E . On définit le rang de la famille $(x_1, \dots, x_p)$ par :

$$\text{rg}(x_1, \dots, x_p) = \dim(\text{Vect}(x_1, \dots, x_p))$$

Proposition 14 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E . Alors :

$$(x_1, \dots, x_p) \text{ est libre} \iff \text{rg}(x_1, \dots, x_p) = p$$

Proposition 15 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E . Alors :

1. F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$
2. $F = E \iff \dim(F) = \dim(E)$

Proposition 16 Existence de supplémentaires

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E . Alors il existe au moins un sous-espace vectoriel G de E tel que : $E = F \oplus G$.

Remarque 10 En règle générale, si $F \neq E$ et $F \neq \{0_E\}$, alors F a une infinité de supplémentaires.

Proposition 17 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces de E .

$$F \oplus G = E \iff \begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \end{cases} \iff \begin{cases} F + G = E \\ \dim(F) + \dim(G) = \dim(E) \end{cases}$$

En particulier : Si F, G sont supplémentaires dans E . Alors :

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$$

Proposition 18 Formule de Grassman

Soit F et G deux sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie. Alors :

$$\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$$

III Applications linéaires

Définition 11 Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

On appelle application linéaire de E dans F toute application $f : E \rightarrow F$ telle que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (u, v) \in E^2, f(u + \lambda \cdot v) = f(u) + \lambda \cdot f(v).$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .

Alors $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Définition 12 Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et f une application linéaire de E dans F .

1. Si $E = F$ alors on dit que f est un endomorphisme de E .
on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .
2. Si f est une bijection de E dans F , on dit que f est un isomorphisme de E dans F .
3. Si $E = F$ et si f est une bijection de E dans E , on dit que f est un automorphisme de E .
On note $\mathcal{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E .
4. Si $F = \mathbb{K}$, on dit que f est une forme linéaire sur E .

Proposition 19 Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Alors pour toute famille $(x_1, \dots, x_n)$ de vecteurs de E et tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n).$$

On a de plus $f(O_E) = O_F$.

Proposition 20 Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$.

Alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$. Généralisation à une composée de plusieurs applications linéaires.

En particulier une composée d'endomorphismes de E est un endomorphisme de E .

Proposition 21 Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

Soit G un sous-espace vectoriel de E et soit H un sous-espace de F .

Alors $f(G) = \{f(x), x \in G\}$, **image directe** de G par f , est un sous-espace vectoriel de F .

Et $f^{-1}(H) = \{x \in E / f(x) \in H\}$, image réciproque de H par f , est un sous-espace vectoriel de E .

Définition 13 Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. On définit le noyau de f par :

$$\text{Ker}(f) = \{x \in E / f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\}).$$

2. On définit l'image de f par :

$$\text{Im}(f) = \{f(x), x \in E\} = f(E).$$

Alors $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de E et $\text{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F .

Remarque 11 En pratique : $x \in \text{Ker}(f) \iff f(x) = 0$ et $y \in \text{Im}(f) \iff \exists x \in E / y = f(x)$.

Proposition 22 Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$ alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$. De plus, dans ce cas, on a :

- $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E, G)} \iff \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$. 
- $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$
- $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$.
- $\forall \lambda \in \mathbb{K}, (\lambda f) \circ g = \lambda(f \circ g) = f \circ (\lambda g)$

La loi $\circ$ est associative, distributive à gauche et à droite par rapport à l'addition, possède un élément neutre Id_E .

Notation $f^n = f \circ f \circ \dots \circ f$ pour $f \in \mathcal{L}(E)$ et $n \in \mathbb{N}^*$, et $f^0 = \text{Id}_E$.

Proposition 23 Si $(f, g) \in (\mathcal{L}(E))^2$, et si f et g commutent (c'est à dire $g \circ f = f \circ g$) alors :

$$(f + g)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^k \circ g^{n-k} \text{ (formule du binôme)}$$

$$\text{et l'identité remarquable : } f^n - g^n = (f - g) \circ \left(\sum_{k=0}^{n-1} f^k \circ g^{n-1-k} \right)$$

En particulier, on peut appliquer la formule du binôme pour calculer $(f + \text{Id}_E)^n$ ou bien $(f + \lambda \text{Id}_E)^n$ (où $\lambda \in \mathbb{K}$) et on a $f^n - \text{Id}_E = (f - \text{Id}_E) \circ (\text{Id}_E + f + \dots + f^{n-1})$

Proposition 24 Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

1. f est **injective** si et seulement si $\text{Ker}(f) = \{0_E\}$.
2. f est **surjective** si et seulement si $\text{Im}(f) = F$.

Proposition 25 Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et f un **isomorphisme** de E dans F . Alors f^{-1} est un isomorphisme de F dans E . On dit alors que E et F sont isomorphes.

Remarque 12 En particulier si f est un automorphisme de E , alors f^{-1} est un automorphisme de E . L'ensemble $\mathcal{GL}(E)$ des automorphismes de E est un **groupe** pour la loi $\circ$: le groupe linéaire de E .

Proposition 26 Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de **dimension finie** et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Alors :

f est un isomorphisme de E dans F **si et seulement si** $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une base de F .

Remarque 13 Sous les mêmes hypothèses, on a plus généralement :

1. f est injective $\iff (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre
2. f est surjective $\iff (f(e_1), \dots, f(e_n))$ est génératrice

Proposition 27 Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie, soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et soit $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_n)$ famille génératrice de E .

$$\text{Alors : } \text{Im}(u) = \text{Vect}(u(x_1), \dots, u(x_n)).$$

Remarque 14 Propriété très utile en pratique pour déterminer l'image d'une application linéaire en prenant une base de E .

Théorème 4 Caractérisation des isomorphismes

Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de **dimension finie** et tels que $\dim(E) = \dim(F)$. On considère $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors les trois propositions suivantes sont **équivalentes** :

1. f est un **isomorphisme** de E dans F
2. f est injective
3. f est surjective

Remarque 15 Important : cas particulier des **endomorphismes** sur un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de **dimension finie**.

Proposition 28 Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de **dimension finie**. Alors :

$$E \text{ et } F \text{ sont isomorphes} \iff \dim(E) = \dim(F)$$

Théorème 5 Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels avec E **de dimension finie**. On considère $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une **base** de E et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de F .

Alors il **existe une et une seule** application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$\begin{cases} f(e_1) = u_1 \\ \vdots \\ f(e_n) = u_n \end{cases}$$

Théorème 6 Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et G, H deux sous-espaces vectoriels de E **supplémentaires** dans E . Alors une application linéaire de E dans F est entièrement déterminée par ses **restrictions** à G et à H .

Cela signifie si on considère $g \in \mathcal{L}(G, F)$ et $h \in \mathcal{L}(H, F)$ alors il existe une et une seule application linéaire $f \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que :

$$\begin{cases} f|_G = g \\ f|_H = h \end{cases}$$

Des endomorphismes remarquables : Projecteurs et symétries.

Définition 14 **Projecteurs associés à deux sous-espaces supplémentaires dans E .**

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E . Alors on sait que

$$\forall \vec{x} \in E, \exists ! (\vec{x}_1, \vec{x}_2) \in E_1 \times E_2 \text{ tel que } \vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2.$$

On appelle : projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 l'application $p : E \rightarrow E, x \mapsto x_1$. On dit aussi que p_1 est le projecteur de base E_1 et de direction E_2 .

De même, on appelle projecteur sur E_2 parallèlement à E_1 l'application $q : E \rightarrow E, x \mapsto x_2$.

p et q sont les projecteurs associés à E_1 et E_2 .

Cas particuliers : si $E_1 = E$ alors $p = \text{Id}_E$ et si $E_1 = \{0_E\}$, alors $p = 0$.

Proposition 29 Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E .

Soient p et q les projecteurs associés à E_1 et E_2 . Alors

- Pour tout $x \in E$, $\vec{x} = p(\vec{x}) + q(\vec{x})$ c'est à dire $p + q = \text{Id}_E$.
- Pour tout $x \in E$, $x = \underbrace{p(x)}_{\in E_1} + \underbrace{x - p(x)}_{\in E_2}$
- $p \circ q = 0$ et $q \circ p = 0$

Proposition 30 Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans E .

Soit p le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 . Alors :

- p est un endomorphisme de E .
- $\text{Ker}(p) = E_2$ et $\text{Im}(p) = E_1$
- $x \in E_2 \iff p(x) = 0$ c'est à dire : $E_2 = \text{Ker}(\text{Id}_E - p)$.
- Pour tout $x \in E$, $p(p(x)) = p(x)$ c'est à dire : $p \circ p = p$

Remarque 16 Si p est un projecteur de E , alors $\text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p) = E$.

Supposons que E **soit de dimension finie** et que p n'est pas un projecteur « dégénéré ».

Prenons $(e_1, \dots, e_k)$ une base de $\text{Im}(p)$ et $(e_{k+1}, \dots, e_n)$ une base de $\text{Ker}(p)$ (en supposant que ce n'est pas un projecteur « dégénéré »).

Alors $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E dans laquelle la matrice de p est :

Théorème 7 Caractérisation des projecteurs.

Soit p un endomorphisme de E . Alors p est un projecteur de E si et seulement si $p \circ p = p$.
 Dans ce cas, p est le projecteur sur $\text{Im}(p)$ parallèlement à $\text{Ker}(p)$.

Définition 15 Symétries associées à deux sous-espaces supplémentaires dans E .

Soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$.
 Soit p le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 et soit q le projecteur sur E_2 parallèlement à E_1 .
 Alors on appelle symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 l'application $s = p - q$.
 On dit (parfois) aussi que s_1 est la symétrie de base E_1 et de direction E_2 .
 Autrement dit, si $\vec{x} = \underbrace{x_1}_{\in E_1} + \underbrace{x_2}_{\in E_2}$ alors $s(\vec{x}) = \vec{x}_1 - \vec{x}_2$.

Remarque 17 • Comme $p + q = \text{Id}_E$, on a aussi $s = 2p - \text{Id}_E$.

- On peut donc aussi écrire : $p = \frac{1}{2}(s + \text{Id}_E)$.

Proposition 31 Une symétrie vectorielle est un endomorphisme de E .

Remarque 18 On a donc $E = \text{Ker}(s - \text{Id}) \oplus \text{Ker}(s + \text{Id})$. Supposons que E est de dimension finie. Alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de la symétrie s est :

Remarque 19 De manière générale, une application f telle que $f \circ f = \text{Id}$ est dite **involutive**. Elle est alors bijective et $f^{-1} = f$.

Proposition 32 Soit s une symétrie (vectorielle) de E .

Alors $s \in \mathcal{GL}(E)$, c'est-à-dire que s est un automorphisme de E . De plus : $s^{-1} = s$.

Théorème 8 Caractérisation des symétries (vectorielles).

Soit s un endomorphisme de E . Alors s est une symétrie de E si et seulement si $s \circ s = \text{Id}$.
 Dans ce cas, s est la symétrie par rapport à $\text{Ker}(s - \text{Id})$ parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{Id})$.

Rang d'une application linéaire

Définition 16 Soient E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que u est de rang fini si $\text{Im}(u)$ est de dimension finie. On définit alors le rang de u par :

$$\text{rg}(u) = \dim(\text{Im}(u)).$$

Remarque 20 Si E est de dimension finie, et si $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E alors :

$$\text{rg}(u) = \dim(\text{Vect}(u(e_1), \dots, u(e_n))).$$

Proposition 33 Soient E , F et G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$ de rangs finis. Alors :

1. $\text{rg}(v \circ u) \leq \min(\text{rg}(u), \text{rg}(v))$.
2. Si v est un **isomorphisme** de F dans G alors $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(u)$.
3. Si u est un **isomorphisme** de E dans F alors $\text{rg}(v \circ u) = \text{rg}(v)$.

Pour résumer les affirmations *ii)* et *iii)*, on parle d'« **invariance du rang par composition avec un isomorphisme** ».

Théorème 9 Théorème du rang

Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et si S est un supplémentaire de $\text{Ker}(u)$ dans E , alors u induit un isomorphisme de S sur $\text{Im}(u)$.

Formule du rang : si E est de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\dim(E) = \dim(\text{Ker}(u)) + \text{rg}(u)$.

Proposition 34 Si $\dim(E) = \dim(F)$. Alors :

$$u \text{ est un isomorphisme de } E \text{ dans } F \iff \text{rg}(u) = \dim(E) \iff \text{Ker}(u) = \{0_E\}.$$

(Notamment pour un endomorphisme u d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie)

Proposition 35 Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible. Autrement dit :

Définition 17 Une équation linéaire est une équation d'inconnue x et de la forme

$$f(x) = b \text{ où } \begin{cases} E \text{ et } F \text{ sont deux } \mathbb{K}\text{-ev} \\ f \in \mathcal{L}(E, F) \\ b \in F \end{cases}$$

Proposition 36 Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $b \in F$. On considère l'équation linéaire $f(x) = b$ (E). Alors :

1. (E) admet au moins une solution si et seulement si $b \in \text{Im}(f)$.
2. Dans ce cas, en notant x_0 une solution quelconque de (E), l'ensemble des solutions est :

$$\mathcal{S} = x_0 + \text{Ker}(f) = \{x_0 + x \mid x \in \text{Ker}(f)\}.$$

Remarque 21 La solution x_0 est dite *particulière*.

Exemples : systèmes linéaires et équations différentielles linéaires d'ordre 1 et 2. Suites arithmético-géométriques.

Applications linéaires en dimensions finies et matrices

Définition 18 Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions respectives $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F . Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Alors pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $u(e_j)$ se décompose de manière unique dans la base $\mathcal{B}'$:

$$\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, u(e_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j} f_i.$$

On définit alors la matrice de l'application linéaire u relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ par :

$$A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u) = (a_{i,j})_{(i,j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; p \rrbracket}.$$

Proposition 37 Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions respectives $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F . Alors l'application $\varphi : \mathcal{L}(E, F) \longrightarrow M_{n,p}(\mathbb{K})$
 $u \longmapsto \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$

est un **isomorphisme** de $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

En particulier $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$.

Remarque 22 Cas particulier et très important des **endomorphismes** avec $E = F$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$. De même dans ce qui suit.

Proposition 38 Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions respectives $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F . Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $x \in E$. On note $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$ et $X = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$. En notant alors $y = u(x)$ et $Y = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(y)$, on a : $Y = AX$. Autrement dit :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u(x)) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u) \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x).$$

Proposition 39 Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions respectives $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F . Soient $(u, v) \in (\mathcal{L}(E, F))^2$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. Alors :

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\lambda u + \mu v) = \lambda \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u) + \mu \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(v).$$

Remarque 23 Généralisation à une combinaison linéaire d'applications linéaires.

Théorème 10 Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions respectives p, n, q non nulles. Soient $\mathcal{B}$ une base de E , $\mathcal{B}'$ une base de F et $\mathcal{B}''$ une base de G .

Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors : $\mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}''}(v \circ u) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}''}(v) \times \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$.

Remarque 24 Par conséquent on a « le même type de » règles de calcul pour les matrices que pour les applications linéaires, notamment la formule du binôme pour des matrices **qui commutent**.



Si A et B sont deux matrices, $AB = 0$ n'implique PAS que $(A = 0 \text{ ou } B = 0)!!!$

Proposition 40 Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de **même dimension finie** non nulle. Soient $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{B}'$ une base de F . Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(u)$. Alors u est un **isomorphisme** de E dans F si et seulement si A est **invertible**. De plus, dans ce cas : $A^{-1} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(u)$

Remarque 25 Dans le cas particulier où $E = F$ de dimension n et où $u \in \mathcal{L}(E)$, on a donc :

$$u \in \mathcal{GL}(E) \iff A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}).$$

Définition 19 Matrice de passage

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n non nulle.

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ deux bases de E .

Alors pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, f_j se décompose de manière unique dans la base $\mathcal{B}'$:

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, f_j = \sum_{i=1}^n p_{i,j} e_i.$$

On définit alors la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ par :

$$P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \mathcal{M}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(Id_E) = (p_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}.$$

Proposition 41 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n non nulle.

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (f_1, \dots, f_n)$ deux bases de E et P la **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Alors P est invertible et $P^{-1} = P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$ la matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Remarque 26 Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n non nulle.

Soient $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $\mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n)$ une famille de vecteurs de E .

Alors $\mathcal{F}$ est une **base** de E si et seulement si $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est **invertible**.

Théorème 11 Changement de base pour un vecteur

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n non nulle et soit $x \in E$.

On considère deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E et note P la **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Soit $X = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$ et $X' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(x)$. On a alors : $X = PX'$

Théorème 12 Changement de base pour un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n non nulle et soit $u \in \mathcal{L}(E)$.

On considère deux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de E et note P la **matrice de passage** de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.

Soit $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$ et $M' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u)$. On a alors : $M' = P^{-1}MP$

Proposition 42 Changement de base pour une application linéaire

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies respectives p et n non nulles.

Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}'_1$ deux bases de E , $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}'_2$ deux bases de F et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

Posons $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u)$, $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'_1, \mathcal{B}'_2}(u)$, $P = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}'_1)$ et $Q = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{B}'_2)$. Alors : $B = Q^{-1}AP$

Définition 20 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On définit f l'application linéaire canoniquement associée à la matrice A comme l'unique application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ telle que $\mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = A$ avec $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ les bases canoniques respectives de $\mathbb{K}^p$ et de $\mathbb{K}^n$.

Définition 21 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ une matrice à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$.

On définit le noyau de A par :

$$\text{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) / AX = 0\}$$

On définit l'image de A par :

$$\text{Im}(A) = \text{Vect}(C_1, \dots, C_p)$$

où $C_1, \dots, C_p$ désignent les **vecteurs colonnes** de A .

$\text{Ker}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\text{Im}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Ainsi, en identifiant $\mathbb{K}^p$ avec $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}^n$ avec $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, et en notant f l'application linéaire canoniquement associée à A , on a :

$$\text{Ker}(A) = \text{Ker}(f)$$

$$\text{Im}(A) = \text{Im}(f)$$

Définition 22 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit le rang de A par :

$$\text{rg}(A) = \dim(\text{Vect}(C_1, \dots, C_p)) = \dim(\text{Im}(A))$$

où $C_1, \dots, C_p$ désignent les **vecteurs colonnes** de A .

Ainsi le rang de A est égal au rang de son application linéaire canoniquement associée.

Définition 23 Théorème du rang

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $\dim(\text{Ker}(A)) + \text{rg}(A) = \dim(\mathbb{K}^p) = p$.

Proposition 43 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée. Alors les propositions suivantes sont **équivalentes** :

1. A est inversible
2. Il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = I_n$
3. Il existe $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $CA = I_n$
4. $\text{Ker}(A) = \{0\}$
5. $\text{Im}(A) = \mathbb{K}^n$
6. $\text{rg}(A) = n$
7. La famille $(C_1, \dots, C_n)$ des vecteurs colonnes de A est une base de $\mathbb{K}^n$
8. La famille $(L_1, \dots, L_n)$ des vecteurs lignes de A est une base de $\mathbb{K}^n$
9. $\det(A) \neq 0$

Remarque 27 Si la famille $(C_1, \dots, C_n)$ des vecteurs colonnes de A est libre, alors c'est une base de $\mathbb{K}^n$.

Proposition 44 Invariance du rang par multiplication par une matrice inversible.

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice **inversible**.

1. Soit $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $\text{rg}(AB) = \text{rg}(B)$.
2. Soit $C \in \mathcal{M}_{q,n}(\mathbb{K})$. Alors $\text{rg}(CA) = \text{rg}(C)$.

Proposition 45 Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note A^T sa transposée. Alors :

$$\text{rg}(A) = \text{rg}(A^T)$$

Par conséquent $\text{rg}(A) = \dim(\text{Vect}(L_1, \dots, L_n))$ où $L_1, \dots, L_n$ désignent les **vecteurs lignes** de A .

Remarque 28 1. Le rang d'un **système** est égal au rang de sa matrice.

2. Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau).

3. Deux matrices **équivalentes** par lignes ou par colonnes ont le même rang.

Définition 24 On dit que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables lorsque :

$$\text{il existe } P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \text{ telle que } B = P^{-1}AP.$$