

# Compléments d'algèbre linéaire

La lettre  $\mathbb{K}$  désigne indifféremment  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

Dans tout ce qui suit,  $E$  désignera un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (sauf mention contraire)

## Table des matières

<b>I Interpolation de Lagrange</b>	<b>1</b>
<b>II Produits d'espaces vectoriels, sommes de sous-espaces vectoriels</b>	<b>2</b>
II.1 Produits d'espaces vectoriels . . . . .	2
II.2 Somme de sous-espace vectoriels . . . . .	2
<b>III Matrices par blocs et sous-espaces stables</b>	<b>4</b>
III.1 Matrices définies par blocs . . . . .	4
III.2 Sous-espaces stables . . . . .	5
<b>IV A propos de matrices carrées</b>	<b>6</b>
IV.1 Rappels de PCSI . . . . .	6
IV.2 Matrices semblables . . . . .	6
IV.3 Trace d'une matrice carrée, trace d'un endomorphisme . . . . .	6
<b>V Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées</b>	<b>7</b>
V.1 Introduction . . . . .	7
V.2 Polynôme annulateur d'un endomorphisme ou d'une matrice . . . . .	8
V.3 Application au calcul de l'inverse . . . . .	8
V.4 Application au calcul des puissances d'une matrice ou d'un endomorphisme . . . . .	8

## I Interpolation de Lagrange

Dans cette partie,  $x_1, x_2, \dots, x_n$  désignent des scalaires deux à deux distincts.

**Proposition 1 (Problème de l'interpolation.)** Pour toute famille  $(y_1, y_2, \dots, y_n)$  de  $\mathbb{K}^n$ , il existe un unique polynôme  $P$  de  $\mathbb{K}_{n-1}[X]$  tel que  $\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad P(x_i) = y_i$

**Proposition 2 (Polynômes de Lagrange.)**

On pose pour tout entier  $i \in \{1, \dots, n\}$ ,  $L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$ . Alors :

- $\forall (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ ,  $L_i(x_j) = \delta_{i,j}$  (symbole de Kronecker).
- $(L_1, L_2, \dots, L_n)$  est une base de l'espace  $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ .

- Tout polynôme  $P$  de  $\mathbb{K}_{n-1}[X]$  s'écrit dans cette base :  $P = \sum_{i=1}^n P(x_i) L_i$ .

Autrement dit les  $(P(x_i))$  sont les coordonnées de  $P$  dans la base  $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ .

- $\sum_{i=1}^n L_i = 1$

## II Produits d'espaces vectoriels, sommes de sous-espaces vectoriels

### II.1 Produits d'espaces vectoriels

**Théorème-Definition 1** Soient  $E_1, \dots, E_m$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Alors l'ensemble  $E_1 \times \dots \times E_m$  peut être muni d'une structure de  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On l'appelle produit cartésien des espace  $E_1, \dots, E_m$ .

**Théorème 1** Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, non nulle. Soit  $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Soit  $\mathcal{B}_2 = (f_1, \dots, f_p)$  une base de  $F$ . Pour  $i \in \{1, \dots, n\}$ , on pose  $g_i = (e_i, 0_F)$  et pour  $i \in \{n+1, \dots, n+p\}$ , on pose  $g_i = (0_E, f_{i-n})$ . Alors  $(g_1, \dots, g_{n+p})$  est une base de  $E \times F$ , appelée base de  $E \times F$  associée à  $\mathcal{B}_1$  et  $\mathcal{B}_2$ . On en déduit que  $E \times F$  est de dimension finie et  $\dim(E \times F) = \dim(E) + \dim(F)$ .

**Théorème 2** Soient  $E_1, \dots, E_m$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie, non nulle. Alors  $E_1 \times \dots \times E_m$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension :

### II.2 Somme de sous-espace vectoriels

**Définition 1** Soient  $F_1, \dots, F_n$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ . On définit la **somme** de  $F_1, \dots, F_n$  par :

$$F_1 + \dots + F_n = \{x_1 + \dots + x_n \mid (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n\}$$

**Proposition 3** Si  $F_1, \dots, F_n$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ , alors :

$$F_1 + \dots + F_n \text{ est un sous-espace vectoriel de } E.$$

**Exemple 1** 1. Dans  $\mathbb{R}^3$ , la somme de deux droites vectorielles (sous-espaces de dimension 1) **distinctes** est un plan (sous-espace de dimension 2) de  $\mathbb{R}^3$ .

2. Dans  $\mathbb{R}[X]$ , on a :  $\mathbb{R}_2[X] + \mathbb{R}_5[X] + \mathbb{R}_3[X] =$

3. Soit  $E$  le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs réelles. Notons  $f_1, f_2$  les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f_1(x) = \cos(x)$ ,  $f_2(x) = \sin(x)$  et  $F = \text{Vect}(f_1, f_2)$ . Soit  $G$  le sous-espace vectoriel de  $E$  formé des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 3. Soit  $H$  la droite vectorielle engendrée par la fonction exponentielle. Décrire les éléments du sous-espace vectoriel  $F + G + H$ .

4. Si  $(v_1, v_2, v_3, v_4)$  est une famille génératrice de  $E$ , alors  $E = \text{vect}(v_1, v_2) + \text{vect}(v_3) + \text{vect}(v_4)$ .

**Remarque 1** Erreur classique : pour deux sous-espaces, ne pas confondre  $F + G$  et  $F \cup G$ .

En règle générale, l'ensemble  $F \cup G$  n'a aucune propriété algébrique intéressante et n'est pas un sous-espace vectoriel de  $E$  (sauf si  $F \subset G$  ou  $G \subset F$ ).

**Définition 2 (Rappel PCSI)** Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ .

- On dit que la somme  $F + G$  est **directe** et on la note  $F \oplus G$  si pour tout  $x \in F + G$ , il existe un **unique** couple  $(x_1, x_2) \in F \times G$  tel que  $x = x_1 + x_2$ .
- On dit que  $F$  et  $G$  sont **supplémentaires dans**  $E$  si la somme est  $F + G$  est directe et si  $F + G = E$ , c'est-à-dire si  $F \oplus G = E$ .

**Exemple 2** • L'ensemble des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  est somme directe de l'espace des fonctions paires et de l'espace des fonctions impaires.

- L'espace des matrices carrées (de taille  $n$ ) est somme directe de l'espace des matrices symétriques et de l'espace des matrices antisymétriques (de taille  $n$ ), ce qui s'écrit :

$$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{S}_n(\mathbb{K}).$$

- $\mathbb{R}^2 = \text{vect}\{(1, 0)\} \oplus \text{vect}\{(0, 1)\}$ ,  $\mathbb{R}^3 = \text{vect}\{(1, 0, 0)\} \oplus \text{vect}\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$  etc....

- Soit  $E = \mathbb{R}^3$ ,  $F = \text{Vect}((2, 1, 4))$  et  $G$  le plan vectoriel d'équation  $x + y + z = 0$ . Montrer que  $E = F \oplus G$ .

Pour de plus amples rappels sur les sommes directes et espaces supplémentaires, voir le poly « Révisions : Algèbre linéaire ». (Caractérisation à l'aide de  $F \cap G$  et des dimensions,...)

**Définition 3** Soient  $F_1, \dots, F_n$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

On dit que la somme  $F_1 + \dots + F_n$  est **directe**, et on la note  $F_1 \oplus \dots \oplus F_n$  ou  $\bigoplus_{i=1}^n F_i$  lorsque :

pour tout  $x \in F_1 + \dots + F_n$ , il **existe un unique  $n$ -uplet**  $(x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n$  tel que :

$$x = x_1 + \dots + x_n.$$

**Remarque 2** On a notamment  $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_n$  si et seulement si :

$$\forall x \in E, \exists!(x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n / x = x_1 + \dots + x_n.$$

**Proposition 4** Soient  $F_1, \dots, F_n$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

Alors la somme  $F_1 + \dots + F_n$  est **directe** si et seulement si le **vecteur nul** se décompose de manière unique dans  $F_1 + \dots + F_n$ .

Autrement dit, la somme  $F_1 + \dots + F_n$  est **directe** si et seulement si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in F_1 \times \dots \times F_n, \left( \sum_{i=1}^n x_i = 0_E \Rightarrow x_1 = \dots = x_n = 0_E \right)$$

**Définition 4** Si  $E = \bigoplus_{i=1}^n F_i$ , on dit qu'on a une décomposition en somme directe de  $E$ .

**Remarque 3** On suppose que  $E = \bigoplus_{i=1}^n F_i$ .

Alors l'application  $(x = \sum_{i=1}^n \underbrace{x_i}_{\in F_i}) \mapsto x_k$  est le projecteur sur  $F_k$  parallèlement à  $\bigoplus_{\substack{i=1, \dots, n \\ i \neq k}} F_i$ .

On définit ainsi  $p_1, \dots, p_n$ . Et l'on peut écrire :  $\text{Id}_E = \sum_{i=1}^n p_i$ .

**Théorème 3** Si  $F_1, \dots, F_p$  sont des sous-espaces de dimension finie d'un espace vectoriel  $E$  (de dimension quelconque), alors :

$$\dim \left( \sum_{i=1}^p F_i \right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$$

avec égalité si et seulement si la somme est directe.

**Proposition 5** Soit  $E$  un espace vectoriel et  $F_1 \oplus \dots \oplus F_n$  une somme directe de sous-espaces vectoriels. Soit  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$  des bases respectives de  $F_1, \dots, F_n$ . Alors la famille obtenue par **concaténation** des bases  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$  est une base de  $F_1 \oplus \dots \oplus F_n$ .

On dit que cette base est **adaptée à la décomposition en somme directe** de  $F_1 \oplus \dots \oplus F_n$ .

### Cas particulier : si $E$ est de dimension finie

**Corollaire 1** Si  $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_n$ , et si  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$  sont des bases respectives de  $F_1, \dots, F_n$ , alors la famille obtenue par concaténation des bases  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$  est une base de  $E$ .

**Corollaire 2** Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie. Si  $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_n$ , alors  $\dim(E) =$

**Proposition 6** Soit  $E$  un espace de dimension finie et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

Si  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_r$  est une partition de  $\mathcal{B}$ , alors  $E = \bigoplus_{i=1}^r F_i$  où  $F_i = \text{Vect}(\mathcal{F}_i)$ .

### III Matrices par blocs et sous-espaces stables

#### III.1 Matrices définies par blocs

Considérons une matrice  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  ainsi que deux entiers  $i \in \llbracket 1 ; n - 1 \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1 ; p - 1 \rrbracket$ .

Divisons les lignes de  $A$  en deux ensembles : les lignes dont les indices sont compris entre 1 et  $i$  et celles dont les indices sont compris entre  $i + 1$  et  $n$ . Faisons de même avec les colonnes en distinguant celles dont les indices sont compris entre 1 et  $j$  de celles dont les indices sont compris entre  $j + 1$  et  $p$ .

En procédant de la sorte, on divise la matrice  $A$  en quatre blocs :

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_1} & \boxed{A_2} \\ \boxed{A_3} & \boxed{A_4} \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow i \\ \uparrow n-i \end{matrix} \quad \text{avec } A_1 \in \mathcal{M}_{i,j}(\mathbb{K}), A_2 \in \mathcal{M}_{i,p-j}(\mathbb{K}), A_3 \in \mathcal{M}_{n-i,j}(\mathbb{K}), A_4 \in \mathcal{M}_{n-i,p-j}(\mathbb{K}).$$

$\leftarrow j \quad \leftarrow p-j \rightarrow$

Une telle matrice sera dite *définie par blocs*.

Pour peu que le découpage soit identique, la définition par bloc de deux matrices est évidemment compatible avec l'addition :

$$\text{si } A' = \begin{pmatrix} \boxed{A'_1} & \boxed{A'_2} \\ \boxed{A'_3} & \boxed{A'_4} \end{pmatrix} \quad \text{alors } \lambda A + A' = \begin{pmatrix} \boxed{\lambda A_1 + A'_1} & \boxed{\lambda A_2 + A'_2} \\ \boxed{\lambda A_3 + A'_3} & \boxed{\lambda A_4 + A'_4} \end{pmatrix}$$

mais le fait le plus remarquable est que le découpage par blocs est *compatible avec la multiplication*, pour peu que les découpages conduisent à des produits « licites » de matrices :

$$\text{si } B = \begin{pmatrix} \boxed{B_1} & \boxed{B_2} \\ \boxed{B_3} & \boxed{B_4} \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow j \\ \uparrow p-j \end{matrix} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \quad \text{alors } AB = \begin{pmatrix} \boxed{A_1 B_1 + A_2 B_3} & \boxed{A_1 B_2 + A_2 B_4} \\ \boxed{A_3 B_1 + A_4 B_3} & \boxed{A_3 B_2 + A_4 B_4} \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow i \\ \uparrow n-i \end{matrix} \in \mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$$

$\leftarrow k \quad \leftarrow q-k \rightarrow$        $\leftarrow k \quad \leftarrow q-k \rightarrow$

Autrement dit, les matrices définies par blocs se multiplient entre elles tout comme si les blocs étaient des scalaires, à condition que chaque multiplication corresponde à une multiplication « légale » de matrices (en ce qui concerne les dimensions).

Ces propriétés s'étendent par récurrence au cas d'un découpage des lignes et/ou des colonnes en un nombre arbitraire de subdivisions.

**Définition 5** Une matrice carrée  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  est dite *diagonale par bloc* lorsqu'il existe une subdivision de  $\llbracket 1 ; p \rrbracket$  telle que :

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & & & \\ & \boxed{A_{22}} & & \\ & & \dots & \\ & & & \boxed{A_{kk}} \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow i_1 \\ \uparrow i_2 \\ \vdots \\ \uparrow i_k \end{matrix}$$

$\leftarrow i_1 \quad \leftarrow i_2 \quad \dots \quad \leftarrow i_k \rightarrow$

Tous les blocs sont nuls hormis les blocs diagonaux, qui sont tous carrés.

Une matrice carrée  $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$  est dite *triangulaire par bloc* lorsqu'il existe une subdivision de  $\llbracket 1 ; p \rrbracket$  telle que :

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & \boxed{A_{12}} & \dots & \boxed{A_{1k}} \\ & \boxed{A_{22}} & \dots & \boxed{A_{2k}} \\ & & \dots & \\ & & & \boxed{A_{kk}} \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow i_1 \\ \uparrow i_2 \\ \vdots \\ \uparrow i_k \end{matrix}$$

$\leftarrow i_1 \quad \leftarrow i_2 \quad \dots \quad \leftarrow i_k \rightarrow$

Tous les blocs diagonaux sont carrés, et les blocs situés sous la diagonale sont nuls.

### III.2 Sous-espaces stables

**Définition 6** Soit  $H$  un sous-espace vectoriel de  $E$ , et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme. On dit que  $H$  est *stable* par  $u$  lorsque  $u(H) \subset H$ .

**Proposition 7** Si  $u$  et  $v$  sont deux endomorphismes d'un espace vectoriel  $E$  tels que  $uov = vov$ , alors le noyau  $\text{Ker}(u)$  et l'image  $\text{Im}(u)$  sont des sous-espaces stables par  $v$ .

**Exemple 3** Soit  $u$  l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

1. Montrer que le sous-espace  $F$  d'équation  $x + y + z = 0$  est stable par  $u$ .
2. Construire une base de  $E$  adaptée à la stabilité de  $F$  et déterminer la matrice de  $u$  dans cette base.

Considérons une base adaptée à un sous-espace vectoriel  $H$ , c'est-à-dire construite à partir d'une base  $(e_1, \dots, e_k)$  de  $H$  puis complétée pour former une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_p)$  de  $E$ .

Alors  $H$  est stable par  $u$  si et seulement si  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(u)$  est de la forme :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{|c|} \hline k \\ \hline \end{array} \left( \begin{array}{|c|c|} \hline A & C \\ \hline O & D \\ \hline \end{array} \right) \\ \begin{array}{|c|} \hline p-k \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$\begin{array}{|c|c|} \hline k & p-k \\ \hline \end{array}$

En effet, le fait que la matrice soit de cette forme signifie que :  $\forall j \in \llbracket 1 ; k \rrbracket$ ,  $u(e_j) \in H = (e_1, \dots, e_k)$ .

Lorsque  $H$  est stable par  $u$ , la restriction de  $u$  à  $H$  définit donc un endomorphisme  $u_H$  de  $H$  dont la matrice dans la base  $(e_1, \dots, e_k)$  est la matrice  $A$ . **Cet endomorphisme s'appelle l'induit de  $u$  sur  $H$ .**

**Remarque 4** Dans une base  $(e'_1, \dots, e'_p)$  de  $E$  pour laquelle ce sont les vecteurs  $(e'_{p-k+1}, \dots, e'_p)$  qui forment une base de  $H$ , la matrice d'un endomorphisme stabilisant  $H$  est de la forme :

**Exemple 4**  $\text{Ker}(u)$  et  $\text{Im}(u)$  sont des sous-espaces vectoriels stables de  $u$ . En effet, dans une base dont les  $p$  premiers vecteurs forment une base de  $\text{ker}(u)$ , la matrice associée à  $u$  prend la forme :

De même, dans une base dont les  $r$  premiers vecteurs forment une base de  $\text{Im}(u)$ , la matrice associée à  $u$  est alors de la forme suivante :

**Théorème 4 (Sous-espaces stables et matrice diagonale par blocs)** Soient  $E$  un espace vectoriel de dimension finie possédant une décomposition  $E = F_1 \oplus \dots \oplus F_p$  et  $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_p)$  une base adaptée à la somme directe précédente.

Les sous-espaces  $F_1, \dots, F_p$  sont stables par un endomorphisme  $f$  de  $E$  si et seulement si la matrice de  $f$  dans  $\mathcal{B}$  est diagonale par blocs

$$\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & A_p \end{pmatrix}$$

où  $A_i$  est d'ordre  $\dim F_i$ . Dans ce cas,  $A_i = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_i}(f|_{F_i})$ .

**Exemple 5** Projecteur et symétrie, rotation de  $\mathbb{R}^3$

**Théorème 5 (Sous espaces stables et matrice triangulaire supérieure)**

Soit  $f$  un endomorphisme de  $E$  et  $B = (e_1, e_2, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

$\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$ , on note  $F_i = \text{vect}(e_1, e_2, \dots, e_i)$ .

Les propositions suivantes sont équivalentes :

- Les sous-espaces  $F_i$  sont tous stables par  $f$ .
- La matrice  $A = \text{Mat}_B(f)$  est triangulaire supérieure.

**IV A propos de matrices carrées****IV.1 Rappels de PCSI**

**Définition 7** Soient  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ , de dimension  $n$ .

On appelle matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$  la matrice  $P$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dont les colonnes contiennent les coordonnées des éléments de  $\mathcal{B}'$  relativement à la base  $\mathcal{B}$ . On a aussi  $P = \mathcal{M}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(Id_E)$ .

On note couramment :  $P = \text{Pass}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$

**Proposition 8** Soit  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , soient  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_1'$  des bases de  $F$  avec  $Q = \text{Pass}_{\mathcal{B}_1 \rightarrow \mathcal{B}_1'}$  et soient  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  des bases de  $E$  avec  $P = \text{Pass}_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ .

- Pour tout  $x \in E$ , si on pose  $X = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(x)$  et  $X' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(x)$ , alors :  $X = PX'$
- $P$  est inversible et  $P^{-1} = \text{Pass}_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}$ .
- Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}_1}(f)$  et  $A' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}_1'}(f)$ , alors  $A' = Q^{-1}AP$ .
- Si  $E = F$ , alors  $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(f) = P^{-1}\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)P$  (ou :  $A' = P^{-1}AP$ ).

**IV.2 Matrices semblables**

**Définition 8** Soient  $A, B$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

Si il existe  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  telle que  $B = P^{-1}AP$ , on dit que  $A$  et  $B$  sont **semblables**.

**Remarque 5** Deux matrices  $A$  et  $B$  sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases d'un même  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. La matrice  $P$  de la relation «  $B = P^{-1}AP$  » s'interprète alors comme la matrice de passage entre ces deux bases.

**Exemple 6** 1. Si  $B = P^{-1}AP$ , alors on a : alors  $A = PBP^{-1}$ .

2. Une matrice est semblable à elle-même.
3. Que dire d'une matrice semblable à  $I_n$  ? à  $\lambda \cdot I_n$  ?

4.  **Important** : si  $B = P^{-1}AP$ , alors pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $B^k = P^{-1}A^kP$  (dém. à écrire au dos).

En particulier : si  $A$  et  $B$  sont semblables, alors  $A^k$  et  $B^k$  sont semblables pour tout  $k \in \mathbb{N}$ .

**Proposition 9** Deux matrices semblables ont même rang.

**Preuve** On rappelle que : si  $Q$  est inversible, alors pour toute matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , on a  $\text{rg}(QM) = \text{rg}(MQ) = \text{rg}(M)$ .

Soient  $A$  et  $P$  deux matrices de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Si  $P$  est inversible alors  $\text{rg}(P^{-1}(AP)) = \text{rg}(AP) = \text{rg}(A)$ .

Deuxième méthode : le rang d'un endomorphisme et de sa matrice dans n'importe quelle(s) base(s) sont égaux.

**IV.3 Trace d'une matrice carrée, trace d'un endomorphisme**

**Définition 9 Trace d'une matrice carrée.**

La **trace** d'une matrice carrée  $A$  est la somme de ses éléments diagonaux. Elle est notée  $\text{tr}(A)$ .

Si  $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , on a donc  $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{i,i}$ .

**Proposition 10** • L'application Trace est une forme linéaire sur  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

- Si  $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ , alors :  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ .
- Deux matrices semblables ont la même trace.

**Remarque 6** L'ensemble  $H = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) / \text{tr}(A) = 0\} = \text{Ker}(\text{tr})$  est un hyperplan de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**Exercice** : Donner une base de cet hyperplan.

**Theorème-Definition 2** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E)$ .

On considère  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f)$ .

Alors  $\text{tr}(A)$  ne dépend pas du choix de  $\mathcal{B}$  et est appelé la **trace** de  $f$ .

Autrement dit : on a pour toute base  $B$  de  $E$  :  $\text{tr}(f) = \text{tr}(\mathcal{M}_B(f))$ .

**Proposition 11** Soit  $E$  de dimension finie.

- L'application « trace » est une forme linéaire sur  $\mathcal{L}(E)$ .
- Pour tout  $f, g$  dans  $\mathcal{L}(E)$ , on a :  $\text{Tr}(f \circ g) = \text{Tr}(g \circ f)$

## V Polynômes d'endomorphismes et de matrices carrées

### V.1 Introduction

**Définition 10** Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Soit  $P = \sum_{k=0}^p a_k X^k$  un polynôme de  $\mathbb{K}[X]$ .

On définit la matrice  $P(A)$  par :  $P(A) = \sum_{k=0}^p a_k A^k$ , avec la convention :  $A^0 = I_n$ .

**Exemple 7** Ecrire  $P(A)$  pour  $P = X^2 + X$  puis pour  $P = X^2 + 7$ .

**Proposition 12** • L'application  $\Phi : \begin{cases} \mathbb{K}[X] & \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ P & \mapsto P(A) \end{cases}$  est une application linéaire.

- Pour tous polynômes  $P$  et  $Q$  de  $\mathbb{K}[X]$ , et pour toute matrice carrée  $A$ , on a :

$$(P \times Q)(A) = P(A) \times Q(A)$$

- Les matrices  $P(A)$  et  $Q(A)$  commutent.

**Exemple 8 Polynôme d'une matrice triangulaire par blocs**

1. Si  $M$  est une matrice triangulaire par blocs,  $M = \begin{pmatrix} A & * \\ 0 & B \end{pmatrix}$ , et si  $P \in \mathbb{K}[X]$ , alors :  $P(M) = \begin{pmatrix} P(A) & * \\ 0 & P(B) \end{pmatrix}$

2. Si  $M$  est diagonale par blocs,  $M = \text{Diag}(M_1, M_2, \dots, M_k)$ , alors pour tout polynôme  $P$  :

$$P(M) = \text{Diag}(P(M_1), P(M_2), \dots, P(M_k)).$$

**Définition 11** Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ .

Si  $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ , on définit l'endomorphisme  $P(u) = \sum_{k=0}^n a_k u^k$ .

$$P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_1 X + a_0$$

$$P(u) = a_n u^n + a_{n-1} u^{n-1} + \dots + a_1 u + a_0 \text{Id}_E$$

**Proposition 13** L'application qui à  $P$  associe  $P(u)$  est une application linéaire qui vérifie :

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2, \quad (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u).$$

Par ailleurs :  $P(u)$  et  $Q(u)$  commutent c'est à dire :

**Proposition 14** Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$  et soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors le noyau de  $P(u)$  est stable par  $u$ .

**ATTENTION :**

Si  $P$  et  $Q$  sont deux polynômes vérifiant  $PQ = 0$ , on sait que l'on peut en déduire que  $P = 0$  ou  $Q = 0$ .

**Ce n'est pas le cas des polynômes d'un endomorphisme :** on peut avoir  $(PQ)(u) = 0$  sans pour autant en déduire que  $P(u) = 0$  ou  $Q(u) = 0$ .

**On peut faire la même remarque concernant les polynômes de matrices...**

Considérons par exemple une projection vectorielle  $u$  : on a  $u^2 - u = 0$ . Si on pose  $P = X$  et  $Q = X - 1$  on a  $PQ = X^2 - X$  donc  $(PQ)(u) = 0$ , mais on a pas en général  $P(u) = 0$  ou  $Q(u) = 0$  (sauf si  $u = 0$  ou  $u = \text{Id}_E$ ).

**Proposition 15 (Polynôme d'endomorphisme et matrice associée)**

Soit  $f$  un endomorphisme d'un espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ .

Soit  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ , et  $A$  la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

Pour tout polynôme  $P$ , la matrice de l'endomorphisme  $P(f)$  dans la base  $\mathcal{B}$ , est la matrice  $P(A)$ .

**V.2 Polynôme annulateur d'un endomorphisme ou d'une matrice**

**Définition 12** Soit  $P \in \mathbb{K}[X]$ .

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . On dit que  $P$  est un polynôme annulateur de  $f$  lorsque  $P(f)$  est l'endomorphisme nul.

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On dit que  $P$  est un polynôme annulateur de  $A$  lorsque la matrice  $P(A)$  est la matrice nulle.

**Exemple 9** Soit  $p$  un projecteur. Donner un polynôme annulateur de  $p$ .

Soit  $s$  une symétrie vectorielle. Donner un polynôme annulateur de  $s$ .

**Proposition 16** Lorsque  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie, tout endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  possède un polynôme annulateur.

Toute matrice carrée possède un polynôme annulateur.

**Exemple 10** Considérons une matrice  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ , et posons  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ .

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & (a+d)b \\ (a+d)c & bc + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+d)a + bc - ad & (a+d)b \\ (a+d)c & (a+d)d + bc - ad \end{pmatrix} = (a+d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} - (ad - bc) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi  $A^2 = \text{tr}(A)A - \text{Det}(A)I_2$ . Autrement dit, le polynôme  $P = X^2 - (\text{tr}A)X + (\text{Det}A)$  est un polynôme annulateur de  $A$ .

**V.3 Application au calcul de l'inverse**

**Exemple 11** Montrer que  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  admet  $X^2 - 5X + 4$  comme polynôme annulateur.

En déduire que  $A$  est inversible et expliciter son inverse.

**Exemple 12** Si  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ , on a vu que  $A^2 - (\text{tr}(A))A + (\text{Det}(A))I_2 = 0$ .

Si  $\text{Det}(A) \neq 0$ , on peut dire que  $A$  est inversible et que  $A^{-1} =$

**Proposition 17 Calcul de l'inverse d'une matrice** On suppose qu'une matrice  $A$  admet un polynôme annulateur  $P$  tel que  $P(0) \neq 0$ .

Alors  $A$  est inversible et on peut exprimer  $A^{-1}$  à l'aide des puissances de  $A$ .

Plus précisément : si  $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$  alors  $A^{-1} =$

A vous de jouer : énoncer des propriétés analogues pour les endomorphismes !

**V.4 Application au calcul des puissances d'une matrice ou d'un endomorphisme**

Soit  $A$  une matrice carrée et soit  $P$  un polynôme annulateur de  $A$ . On suppose que  $\deg(P) = d$ .

Pour calculer  $A^n$ , on peut réaliser la division euclidienne de  $X^n$  par  $P$  :  $X^n = PQ + R$ , avec  $\deg(R) < d$ .

Ainsi,  $A^n = P(A)Q(A) + R(A) = R(A)$  puisque  $P(A) = 0$ .

Le calcul de  $A^n$  se ramène à celui de  $R(A)$ , ce qui peut être intéressant lorsque le degré  $d$  du polynôme annulateur est petit, puisque  $\deg R < d$ .

**Exemple 13** On a vu que la matrice  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$  admet  $X^2 - 5X + 4$  comme polynôme annulateur.

Déterminer le reste dans la division euclidienne  $X^k$  par  $P$ .

Déterminer  $A^k$ .

**Exemple 14** Soit  $p \geq 1$  et soit  $n \geq 1$ .

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de  $(1 + X)^n$  par  $X(X - p)$ .

2. On pose  $U = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ , et  $A = U + I_p = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}$ .

(a) Calculer  $U^2$  et déterminer un polynôme annulateur de  $U$ .

(b) En déduire  $A^n$  pour  $n \in \mathbb{N}$ , ainsi que l'inverse de  $A$ , s'il existe.

De la même manière : si  $u$  est un endomorphisme de  $E$  de polynôme annulateur  $P$  qui est de degré  $d$ , alors on peut réaliser la division euclidienne de  $X^n$  par  $P$  :

$$X^n = PQ + R, \text{ avec } \deg(R) < d.$$

Ainsi  $u^n = P(u) \circ Q(u) + R(u) = R(u)$  puisque  $P(u) = 0$ .