

1 Systèmes linéaires

★ **Exercice 1** Résoudre, en discutant suivant les valeurs de $a \in \mathbb{C}$, le système :

$$\begin{cases} 2x & +y & +z & = 3 \\ x & -y & +3z & = 8 \\ x & +2y & +2z & = -3 \\ x & +y & +2z & = a \end{cases}$$

★ **Exercice 2** Résoudre le système suivant $(\Sigma_{(a,b,c)})$, en fonction des paramètres a, b, c .

$$(\Sigma_{(a,b,c)}) : \begin{cases} x & +y & -3z & = a \\ x & +3y & & = b \\ -x & +2y & +6z & = c \end{cases}$$

2 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

★ **Exercice 3** Soit $E = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \text{telles que } u \text{ est une suite convergente}\}$ l'espace vectoriel des suites réelles convergentes. Montrer que les sous-espaces F , constitué des suites de limite nulle, et G , constitué des suites constantes, sont supplémentaires dans E .

★ **Exercice 4** Soit E l'espace vectoriel des fonctions continues sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles. On considère F l'ensemble des fonctions f de E telles que $\int_0^1 f(t)dt = 0$.

Montrer que F est un sous-espace vectoriel de E puis en donner un supplémentaire.

3 Familles libres, familles liées

★ **Exercice 5** Soit E les $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que les applications $(x \rightarrow |x|)$, $(x \rightarrow |x - 1|)$, $(x \rightarrow |x + 1|)$ forment une famille libre dans E .

2. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on note f_α la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}, f_\alpha(x) = |x - \alpha|$.

Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$.

Montrer que $(f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_n})$ est une famille libre.

3. Soit $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\alpha_1 < \dots < \alpha_n$.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on note g_α la fonction définie par $\forall x \in \mathbb{R}, g_\alpha(x) = \exp(\alpha x)$. Montrer que $(g_{\alpha_1}, \dots, g_{\alpha_n})$ est une famille libre.

★ **Exercice 6** Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soient $u_1, \dots, u_n$ des vecteurs de E .

Pour $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, on pose $v_i = \sum_{k=1}^i u_k$.

Montrer que : si la famille $(u_1, \dots, u_n)$ est libre, alors la famille $(v_1, \dots, v_n)$ l'est aussi.

4 Bases

★ **Exercice 7**

1. Dans $E = \mathbb{R}^3$, on considère $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 0 \text{ et } 2x - y + z = 0\}$.

Est-ce un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$? Si oui, en donner une base.

2. Même question avec $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | 2x + 3y - 4z = 0\}$.

★ **Exercice 8**

1. Donner une base de chacun des espaces vectoriels suivants :

$E_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \text{tels que } x + y + z = 0\}$

$E_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \text{tels que } x + 3y + z = 0\}$

$E_3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \text{tels que } x + 2y = 0 \text{ et } z + 3y = 0\}$

$E_4 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \text{tels que } x + 2y + t = 0 \text{ et } x + y + z + 2t = 0\}$

2. Déterminer si les ensembles suivants sont des espaces vectoriels. Peut-on en donner des bases?

$$F = \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1]), f'' + f = 0\}$$

$$G = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \exists (a, b, c) \in \mathbb{R}^3, \text{ tel que } : \forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a \cos(x) + b \sin(x) + c\}$$

★ **Exercice 9** Soit E l'ensemble des matrices à coefficients complexes, de la forme $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & c \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ où $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$.

E est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$? Si oui, en donner une base et la dimension.

♡★ **Exercice 10** Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que la famille $(1, (X - a), \dots, (X - a)^n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Pour $p \leq n$, donner les coordonnées de X^p dans cette base.
3. Exprimer les coordonnées dans cette base d'un polynôme quelconque en fonction de ses dérivées en a .

♡★ **Exercice 11** Donner la dimension de l'espace des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, puis celle de l'espace des matrices antisymétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

★ **Exercice 12**

1. Compléter en une base de $\mathbb{R}^4$ la famille $\vec{x}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{x}_2 = (1, 1, 2, 2)$
2. Compléter en une base de $\mathbb{R}^4$ la famille $\vec{x}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\vec{x}_2 = (1, 1, 2, 0)$
3. Compléter en une base de $\mathbb{R}^3$ la famille $\vec{x}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{x}_2 = (1, 1, 2)$

5 Applications linéaires

♡★ **Exercice 13** Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E tel que : $u^2 - 3u + 2\text{Id}_E = 0$.

1. Trouver deux réels a et b tels que : $u^2 - 3u + 2\text{Id}_E = (u - a\text{Id}_E) \circ (u - b\text{Id}_E) = (u - b\text{Id}_E) \circ (u - a\text{Id}_E)$
2. Montrer que les ensembles $F_1 = \{\vec{x} \in E \mid u(\vec{x}) = \vec{x}\}$ et $F_2 = \{\vec{x} \in E \mid u(\vec{x}) = 2\vec{x}\}$ sont des sous-espaces vectoriels de E .
3. Montrer enfin que les sev F_1 et F_2 sont des sev supplémentaires de E .

★★ **Exercice 14** Soient f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E . Démontrer les équivalences :

1. $\text{Ker}(g \circ f) = \text{Ker}(f) \iff \text{Ker}(g) \cap \text{Im}(f) = \{0\}$;
2. $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g) \iff \text{Ker}(g) + \text{Im}(f) = E$.

♡★ **Exercice 15** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que :

$$\exists (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{K}^n \text{ tel que : } a_0 \neq 0 \text{ et } f^n + a_{n-1}f^{n-1} + \dots + a_1f + a_0\text{Id} = f^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^k = 0_{\mathcal{L}(E)}$$

Montrer que : f est un automorphisme de E expliciter f^{-1} en fonction de f et de ses puissances successives.

♡★ **Exercice 16** Soit un entier $n \geq 1$, et $E = \mathbb{R}_n[X]$, l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n . On définit l'opérateur dérivation D par : $\forall P \in E, D(P) = P'$.

1. Montrer que D est un endomorphisme de E . Déterminer son noyau et son image.
2. Calculer $(\text{Id}_E - D) \circ (\text{Id}_E + D + D^2 + \dots + D^n)$.
3. Justifier que D est un endomorphisme nilpotent de E , c'est à dire qu'il existe un entier p tel que $D^p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
4. Montrer que $\text{Id}_E - D$ est un isomorphisme de E .

Résoudre alors, dans E puis $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, l'équation différentielle suivante : $y'(x) - y(x) = \frac{x^n}{n!}$.

♡★ **Exercice 17** Soit E l'espace des suites réelles.

1. On considère l'application φ définie sur E de la manière suivante : $\varphi(u) = v$ avec : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = u_{n+1}$. Montrer que φ est un endomorphisme de E .
2. Justifier que $\varphi - 3\text{Id}_E$ est aussi un endomorphisme de E . Exprimer le terme général de $(\varphi - 3\text{Id}_E)(u)$.
3. Dans cette question, on cherche toutes les suites satisfaisant la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2^n.$$

- (a) Chercher si il existe une suite géométrique satisfaisant cette récurrence.
- (b) Déterminer l'ensemble S des suites réelles $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfaisant à la relation de récurrence ci-dessus.

6 Applications linéaires en dimension finie

♡★**Exercice 18** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, a_1, \dots, a_n)$ des nombres complexes distincts deux à deux. Soit par ailleurs $f : \mathbb{C}_n[X] \rightarrow \mathbb{C}^{n+1}$, $P \mapsto (P(a_0), P(a_1), \dots, P(a_n))$.

1. Montrer que f est un isomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$ dans $\mathbb{C}^{n+1}$.
2. Soit $(e_0, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^{n+1}$.
Que peut-on dire de la famille $(f^{-1}(e_0), f^{-1}(e_1), \dots, f^{-1}(e_n))$?
3. Donner une forme factorisée de $f^{-1}(e_i)$ pour tout $i \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

♡★ **Exercice 19** Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\text{Ker } f$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\text{Im } f$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$?

♡★ **Exercice 20** Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension $n \neq 0$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour p entier naturel, on pose $K_p = \text{Ker}(f^p)$ et $I_p = \text{Im}(f^p)$.

1. Question préliminaire : montrer que :

$$\forall (u, v) \in \mathcal{L}(E)^2, \text{Ker}(v \circ u) = \text{Ker}(u) \iff \text{Ker}(v) \cap \text{Im}(u) = \{0_E\}.$$

2. Montrer qu'il existe un entier r tel que : $I_r = I_{r-1}$ et $K_r = K_{r-1}$.
Montrer qu'on a alors : $\forall s \geq r, I_r = I_s$ et $K_r = K_s$.
3. Montrer que : $\forall s \geq r, E = I_s \oplus K_s$.

7 Matrices

♡★ **Exercice 21**

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I + J$. Calculer $J, J^2, J^3 \dots$ puis A^n à l'aide de la formule du binôme.
2. Soit $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $J = T + I_3$. Calculer J^2 , puis par récurrence J^n . Ensuite appliquer la formule du binôme pour calculer T^n en écrivant $T = J - I_3$.
3. Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients valent 1.
Que vaut J^k pour $k \in \mathbb{N}$?
Donner le rang de J et une base de $\text{Ker}(J)$.

♡★ **Exercice 22** On note J la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Calculer J^n pour tout entier n .
2. On pose $A = 2I + 3J$. Calculer les puissances de A .
3. Généralisation : calculer les puissances de $B = aI + bJ$.

★ **Exercice 23** On considère la matrice réelle définie par : $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer M^n pour $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Déterminer l'espace vectoriel F engendré par les puissances entières de M . En trouver une base.
3. ★★ Trouver l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ commutant avec M

★ **Exercice 24** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$. Si existence, donner A^{-1} . Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

♡★ **Exercice 25**

1. Montrer que : si la matrice carrée A vérifie $A^2 + A + 2I_n = 0$, alors elle est inversible.
2. Montrer que : si $A^n + a_{n-1}A^{n-1} + \dots + a_1A + a_0I_n = 0$ avec $a_0 \neq 0$, alors A est inversible et le calcul de A^{-1} se fait aisément.

♡♡★**Exercice 26** Soit $\mathcal{B} = \{E_{i,j}, (i,j) \in \{1, \dots, n\}^2\}$ la base canonique de $M_n(\mathbb{K})$.

Montrer que $E_{i,j}E_{k,l} = 0$ si $j \neq k$ et $E_{i,j}E_{k,l} = E_{i,l}$ si $j = k$.

★**Exercice 27** Calculer l'inverse de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et de $B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ \vdots & \dots & a_2 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \vdots \\ a_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

★**Exercice 28** Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 3 \\ \lambda & 3 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -4 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \\ -4 & 4 & -4 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

★**Exercice 29** Déterminer rang, noyau et Image de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

♡★**Exercice 30** Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer A^n pour $n \in \mathbb{N}$. La formule reste-t-elle valable pour les entiers négatifs ?

♡★**Exercice 31** On dit qu'une matrice M est *nilpotente* si il existe un entier naturel non nul k tel que $M^k = O$. Soient A et B deux matrices qui commutent, c'est à dire que $AB = BA$.

Montrer que si : A est nilpotente, alors AB l'est aussi et $I_n - A$ est inversible.

Montrer que si A et B sont toutes les deux nilpotentes, alors $A + B$ l'est aussi.

★★**Exercice 32** Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $M_n(\mathbb{C})$. On suppose que : $\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$

1. Donner un exemple de matrice non diagonale de $M_3(\mathbb{R})$ qui soit à diagonale strictement dominante.

2. On suppose qu'il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $X \neq 0$, $AX = 0$ et $(\forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad |x_1| \geq |x_i|)$.

Aboutir à une contradiction en utilisant la première ligne du système $AX = 0$.

3. Montrer qu'il n'existe pas de $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tel que $X \neq 0$ et $AX = 0$. En déduire que A est inversible.

8 Matrices et applications linéaires

★**Exercice 33** Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$ et soit u l'application définie par $u(P) = P' + 2P$.

Montrer que u est un endomorphisme de E et donner sa matrice relativement à la base canonique de E .

♡★**Exercice 34** Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans $\mathbb{R}_3$ canoniquement associé à la matrice $M = \begin{pmatrix} -11 & 7 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 7 & 1 \end{pmatrix}$

Déterminer le rang de f ainsi que des bases de son noyau et de son image. Donner une équation de l'image.

♡★**Exercice 35** Dans $E = \mathbb{R}^3$, on pose $u_1 = (1, 2, 1)$, $u_2 = (2, 3, 3)$ et $u_3 = (3, 7, 1)$.

Vérifier que (u_1, u_2, u_3) est une base de E .

Soit $f = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et soit (x', y', z') le triplet de coordonnées de f dans la base (u_1, u_2, u_3) . Quelle est la relation entre (x, y, z) et (x', y', z') ?

★★**Exercice 36** Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $\mathcal{B}$ la base canonique de E .

À tout polynôme P de E , on associe : $\Phi(P) = 3XP' + (X^2 - 1)P''$.

1. Montrer que $\Phi \in \mathcal{L}(E)$. Écrire la matrice de Φ dans la base $\mathcal{B}$.

2. Φ est-il un automorphisme de E ?

3. On considère ici $n = 3$. Déterminer une base de $\text{Im}(\Phi)$ et une base de $\text{Ker}(\Phi)$ à l'aide de $\mathcal{M}_{\mathcal{B}}(\Phi)$.

♥★**Exercice 37** Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A .

On note $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. On pose $f_1 = (0, 1, 1)$, $f_2 = (1, 1, 0)$ et $f_3 = (0, 1, 0)$. Montrer que $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.
3. Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}'$ à la base $\mathcal{B}$.
4. En utilisant la formule de changement de base, déterminer $\mathcal{M}_{\mathcal{B}'}(u)$ et vérifier le résultat obtenu.

★★**Exercice 38** Soit $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Soit ϕ l'application de E dans E définie par $\phi(X) = AX$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de E . Donner la matrice de ϕ dans la base canonique de E .
2. Déterminer le rang et le noyau de ϕ .

★**Exercice 39** On considère les endomorphismes f et g de $\mathbb{C}_n[X]$ définis par :

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], f(P) = P + P' \text{ et } g(P) = P - P' + P'' \dots + (-1)^n P^{(n)}.$$

1. Montrer que f et g sont des isomorphismes réciproques l'un de l'autre.
2. Ecrire la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$ et déterminer son inverse.

★**Exercice 40** Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang de A ainsi que $\text{Ker}(A)$ et $\text{Im}(A)$.

2. A est-elle semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

★★**Exercice 41** Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Déterminer une matrice P inversible telle que $A = P^{-1}TP$

Calculer T^n , puis en déduire A^n .

★**Exercice 42** Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n , où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Soit $f : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ l'application définie par : $\forall P \in \mathbb{R}_n[X], f(P) = P + P'$.

1. Justifier rapidement que f réalise un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Donner la matrice de f dans la base canonique $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \dots, X^n)$.
3. f est-elle bijective ?
4. On pose $Q_0 = 1, Q_1 = X, \dots, Q_k = \frac{n!}{k!} X^k, \dots, Q_n = \frac{n!}{n!}$.

Justifier (très rapidement) que $(Q_0, \dots, Q_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

5. Quelle est la matrice de f dans cette nouvelle base de $\mathbb{R}_n[X]$?

6. On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 3 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & n-1 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 & n \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 1 & 1 & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 1 & 1 & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ces matrices sont-elles semblables ?

9 Projecteurs et symétries

♡★**Exercice 43** Soit $E = \mathbb{R}^3$. Soient $E_1 = \text{vect}\{\vec{e}_1 = (1, 0, 0), \vec{e}_2 = (1, 1, 0)\}$, et $E_2 = \text{Vect}\{\vec{e}_3 = (1, 2, 3)\}$. Montrer que E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E . Donner l'expression de p , le projecteur sur E_1 parallèlement à E_2 puis l'expression du projecteur sur E_2 parallèlement à E_1 , que l'on nommera q . Que vaut $p + q$?

★**Exercice 44** : Pour chacune des applications définies ci-dessous, on dira si ce sont des projecteurs et si c'est le cas, on précisera leur base et leur direction.

a) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, définie par $f(x, y, z) = (x, y, 0)$. b) $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, définie par $g(x, y, z) = (x + z, y + z, 0)$.

♡★**Exercice 45**

Soit P le plan d'équation $x + y + z = 0$ et D la droite d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit p la projection vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sur P parallèlement à D .
Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de p est diagonale.

♡★ **Exercice 46** Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ canoniquement associée à $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -4 & 8 & 4 \\ 5 & -10 & -5 \end{pmatrix}$

Montrer que f est un projecteur. Déterminer des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de son image et de son noyau.

★ **Exercice 47** Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$ et soit p un projecteur de E .

Montrer que $\text{rg}(p) = \text{Tr}(p)$. Quels sont le rang et la trace de la symétrie associée à p ?

★★**Exercice 48** Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soient p et q deux projecteurs de E .

- a) Montrer que p et q ont même image si et seulement si $(p \circ q = q \text{ et } q \circ p = p)$.
- b) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que p et q aient la même direction, c'est à dire le même noyau. (On pourra poser $p' = \text{Id} - p$, $q' = \text{Id} - q$, puis montrer que p' et q' sont des projecteurs, dont on identifiera les noyaux et images. Puis utiliser la question précédente.)
- c) Montrer que l'endomorphisme $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.

★ **Exercice 49** Soit f , un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -ev vérifiant $f = \alpha p + \beta q$, où p et q sont des projecteurs de E tels que $p \circ q = q \circ p = 0$ et α, β des scalaires. Déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ une expression simple de f^n .

10 Hyperplans

★ **Exercice 50** Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie supérieure ou égale à 2.

Soient H_1 et H_2 deux hyperplans de E , distincts. Déterminer la dimension de $H_1 \cap H_2$.

★ **Exercice 51**

1. Soit H un hyperplan d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E , de dimension finie $n \geq 2$.
Soit a un vecteur de E qui n'appartient pas à H . Montrer que $H \oplus \text{Vect}(a) = E$
2. Soit E un espace vectoriel de dimension infinie. Soit H un sous-espace vectoriel tel qu'il existe une droite vectorielle D vérifiant : $E = H \bigoplus D$ (notion d'hyperplan généralisée à un espace de dimension infinie).
Montrer que $H \oplus \text{Vect}(a) = E$

Sous-espaces stables

★ **Exercice 52** Soient u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

On suppose que u et v commutent, c'est-à-dire que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que $\text{Im}(u)$ et $\text{Ker}(u)$ sont stables par v .

★★ **Exercice 53** Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie et u un endomorphisme de E vérifiant :

$$u^3 + u = 0.$$

1. Montrer que l'espace $\text{Im}(u)$ est stable par u .
2. Pour $x \in \text{Im}(u)$, calculer $u^2(x)$.
3. Soit v l'endomorphisme induit par u sur $\text{Im}(u)$. Montrer que v est un automorphisme de $\text{Im}(u)$.

Trace

♡★**Exercice 54** Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n et p un projecteur de E .

1. Montrer que $\text{rg}(p) = \text{tr}(p)$. (Utiliser une base de E dans laquelle la matrice de p permet de conclure).
2. Quels sont le rang et la trace de la symétrie associée à p ?