

Révisions et compléments sur les séries numériques

Dans tout ce qui suit, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Table des matières

I	Rappels	1
I.1	Généralités	1
I.2	Séries particulières	2
I.3	Séries à termes réels positifs	3
I.4	Technique de comparaison série-intégrale	4
I.5	Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes, suites sommables	5
II	Compléments sur les séries à termes réels	6
II.1	Séries alternées	6
II.2	Règle de D'Alembert	6
II.3	Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.	6
III	Approfondissements	7
III.1	Utilisation des développements limités	7
III.2	Utilisation de séries télescopiques pour étudier des suites	7
III.3	Comparaison avec une série de Riemann ou « règle du $n^\alpha u_n$ »	7
IV	BILAN DES OUTILS	8

I Rappels

I.1 Généralités

Définition 1 Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et soit (S_n) la suite de terme général $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

Le couple $((u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (S_n)_{n \in \mathbb{N}})$ est appelée « série de terme général u_n ».

La suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est appelée **suite des sommes partielles de la série**.

u_n est le « terme général » de la série.

La série est notée : $\sum u_n$ (ou parfois $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$).

Le réel $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ est appelé **somme partielle de rang n** de la série $\sum u_n$.

On dit que la série $\sum u_n$ **converge** (ou : **est convergente**) lorsque la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Si la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge, on dit que la série **diverge** (ou : **est divergente**).

Etudier la **nature de la série**, c'est dire si elle est convergente ou divergente.

On dit que deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature si elles sont toutes les deux convergentes ou bien toutes les deux divergentes.

Définition 2 **Somme et restes d'une série convergente.** Soit $\sum u_n$ une série convergente et soit $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

La limite $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n u_k$ est appelée **somme de la série** et notée $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

On appelle **reste (partiel) d'ordre n** de la série $\sum u_n$ le réel $R_n = S - S_n$. Ainsi : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Proposition 1 Soit $\sum u_k$ une série convergente de somme S et soit $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$. Alors :

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = S_n + R_n$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$: « la suite des restes partiels d'ordre n tend vers 0 ». Ceci s'écrit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = 0$

Remarque 1 Il arrive que u_n ne soit défini qu'à partir d'un certain rang n_0 , et dans ce cas, on note la série

$\sum_{k \geq n_0} u_k$ et en cas de convergence, la somme de la série est $S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n_0}^n u_k$

Par exemple, on peut considérer $\sum_{k \geq 1} \frac{1}{k^2}$ et on peut démontrer que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Remarque 2 La nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes.

Si $(u_n)_{n \geq n_0}$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$ et si $n_1 > n_0$ alors $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_1} u_n$ sont de même nature.

Par ailleurs, si $a_n = b_n$ pour $n \geq N$, alors $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont de même nature. Mais si elles convergent, leurs sommes ne sont pas nécessairement égales !

Remarque 3 Si $\sum u_n$ est une série à terme complexes, la convergence de $\sum u_n$ équivaut à la convergence des séries $\sum \operatorname{Re}(u_n)$ et $\sum \operatorname{Im}(u_n)$

Remarque 4 Soit $\sum u_n$ une série et S_n la somme partielle de rang n . Alors $u_n =$

Proposition 2 Si $\sum u_n$ converge, alors $\lim u_n = 0$.

Par contraposition : si (u_n) ne tend pas vers 0, alors $\sum u_n$ diverge.

Définition 3 Si $u_n \not\rightarrow 0$, on dit que la série $\sum u_n$ **diverge grossièrement**.

Exemple 1 Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \frac{n^2}{2(n-2)(n+1)}$.



ATTENTION : en revanche : $u_n \rightarrow 0 \not\Rightarrow \sum u_n$ converge!!!

Exemple 2 Série harmonique : Pour $u_n = \frac{1}{n}$: $u_n \rightarrow 0$, mais $\sum \frac{1}{n}$ diverge

Proposition 3 Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes et soit $\lambda \in \mathbb{K}$.

Alors la série $\sum (u_n + \lambda v_n)$ converge et $\sum_{n=n_0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$.

L'ensemble des séries convergentes est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

L'application qui, à une série convergente, associe sa somme, est linéaire.

Remarque 5 Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries.

- Si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum (u_n + v_n)$
- Si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent, alors $\sum (u_n + v_n)$

I.2 Séries particulières

Proposition 4 **Séries télescopiques.** Soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ une suite à valeurs réelles ou complexes.

Alors la série $\sum_{n \geq n_0} (u_{n+1} - u_n)$ converge si et seulement si la suite $(u_n)_n$ converge.

Théorème 1 Séries géométriques.

Si $r \in \mathbb{C}$, la série $\sum r^n$ **converge** si et seulement si : $|r| < 1$. Dans ce cas, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$.

Remarque 6

Attention : confusion courante entre les conditions $|x| < 1$ et $x \neq 1$.

- Pour tout $x \neq 1$, la somme partielle de la série géométrique $\sum_{n \geq 0} x^n$ vaut : $S_n = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$.
- Sous la condition $|x| < 1$ on a par exemple $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{x}{1-x}$ ou plus généralement : $\sum_{n=n_0}^{+\infty} x^n = \frac{x^{n_0}}{1-x}$.
- Si $|x| < 1$, le reste d'ordre n de la série géométrique de terme général x^n vaut : $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}$.
- Application classique : calcul de sommes faisant intervenir des cosinus ou des sinus.
Exemple : Montrer que $\sum \frac{\cos(n)}{2^n}$ est une série convergente et calculer sa somme.

Proposition 5 (Série exponentielle) Soit $z \in \mathbb{C}$

La série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$ et sa somme vaut : $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z$

Remarque 7 Rappeler comment est défini e^z pour $z \in \mathbb{C}$.
Rappeler l'idée de la démonstration.

I.3 Séries à termes réels positifs

Définition 4 On dit que $\sum u_n$ est une série à termes réels positifs si le terme général de $\sum u_n$ est réel positif, c'est à dire si : $\forall n \geq n_0, u_n \in \mathbb{R}^+$.

Théorème 2 Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Soit $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$. Alors :

- (S_n) est croissante.
- $\sum u_n$ converge si et seulement si (S_n) est majorée. Dans ce cas : $\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = \sup\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$.
- $\sum u_n$ diverge si et seulement si $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$. On peut alors noter $\sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k = +\infty$.
- Dans tous les cas : $(\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n) \implies \left(0 \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} v_k\right)$

N.B. : On peut adapter le 3 premiers items de ce théorème au cas où la série est à termes réels mais positifs à partir d'un certain rang seulement, c'est à dire si : $\exists p \geq n_0 \mid \forall n \geq p, u_n \in \mathbb{R}^+$. Dans ce cas, (S_n) est seulement croissante à partir d'un certain rang...

Théorème 3 Comparaison des séries à termes positifs à l'aide d'inégalités.

Soient (u_n) et (v_n) des suites de nombres réels positifs telles que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq v_n$. Alors :

$$\left(\sum v_n \text{ converge} \right) \implies \left(\sum u_n \text{ converge} \right) \quad \text{et} \quad \left(\sum u_n \text{ diverge} \right) \implies \left(\sum v_n \text{ diverge} \right)$$

Remarque 8 Les résultats concernant la **nature** des séries restent valable si on a seulement $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

Théorème 4 Comparaison des séries à termes positifs à l'aide d'équivalents.

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de nombres réels **positifs** telles que $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} v_n$.

Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Remarque 9 • Il suffit en fait qu'une des deux séries soit à termes positifs, car si elles sont équivalentes, à partir d'un certain rang, elle seront de même signe.

- Le critère d'équivalence reste valable si les deux séries sont à termes négatifs. **Mais le résultat est faux si les termes généraux des séries ne sont pas de signe constant.** Nous le verrons plus tard sur un exemple.

I.4 Technique de comparaison série-intégrale

Cette technique permet d'établir des convergences et des divergences de séries, d'estimer des sommes partielles de séries divergentes dans le cas d'une fonction monotone.

Théorème 5 **Séries de Riemann.**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ **converge** si et seulement si $\alpha > 1$.

Remarque 10 Résultats classiques : $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$ (Voir plus loin exemple 3)

Proposition 6 (Exercice) Soit $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ (avec $a > 0$) une fonction continue, positive et décroissante ; Alors la série $\sum f(n)$ et la suite $(\int_a^n f(t)dt)$ sont de même nature

Exemple 3 Pour $n \geq 1$, on pose $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

1. Justifier que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$.
2. En déduire que $\forall n \geq 2, \ln(n) \leq S_n \leq 1 + \ln(n)$.
3. Montrer que : $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)$.

Exemple 4 Soit $n_0 \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction **positive, continue et décroissante** sur $[n_0, +\infty[$.

- Montrer que : si $\sum f(n)$ diverge, alors $\sum_{k=n_0}^n f(k) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \int_{n_0}^{n+1} f(t)dt$.
- Donner un équivalent des sommes partielles de Riemann $R_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ pour $\alpha \in]0, 1]$.
- Donner un équivalent des restes partiels de Riemann $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ pour $\alpha > 1$.

I.5 Séries absolument convergentes à termes réels ou complexes, suites sommables

Définition 5 (Séries absolument convergentes, suites sommables)

On dit que la série $\sum u_n$ est **absolument convergente** ou **converge absolument** lorsque la série $\sum |u_n|$ converge. On dit aussi que la **suite** (u_n) est sommable.

Notation : $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty$

Remarque 11 Si $u_n > 0$ pour tout n , alors : $(\sum u_n \text{ converge}) \Rightarrow (\sum u_n \text{ converge absolument})$

Exemple 5 Donner un exemple de série convergente mais pas absolument convergente.

Théorème 6 Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

De plus, dans ce cas : $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$

Preuve On suppose que $\sum u_n$ est absolument convergente.

1er cas : $u_n \in \mathbb{R}$. On sait que $-|u_n| \leq u_n \leq |u_n|$ donc $0 \leq u_n + |u_n| \leq 2|u_n|$. Donc si on pose $v_n = u_n + |u_n|$, c'est le terme général d'une série à termes positifs, majoré par le terme général $2|u_n|$ d'une série convergente à termes positifs, donc $\sum (u_n + |u_n|)$ converge. Or $\sum |u_n|$ converge, donc $\sum ((u_n + |u_n|) - |u_n|) = \sum u_n$ converge.

2e cas : $u_n = a_n + ib_n \in \mathbb{C}$. On sait que $0 \leq |a_n| = \sqrt{a_n^2} \leq \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |u_n|$. Or on a supposé que $\sum |u_n|$ converge. Donc d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\sum |a_n|$ converge, c'est à dire que $\sum a_n$ est absolument convergente. D'après le 1er cas étudié, on en déduit que $\sum a_n$ converge. De la même manière, $\sum b_n$ converge. Donc $\sum u_n$ converge (cf Remarque 3).

On a montré que : $(\sum |u_n| \text{ converge}) \Rightarrow (\sum u_n \text{ converge})$.

On pose : $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et $S'_n = \sum_{k=0}^n |u_k|$. On a alors pour tout n : $|S_n| \leq S'_n$ (*).

D'après les hypothèses, (S'_n) converge, et d'après ce qui précède on en déduit que (S_n) converge. On peut donc passer à la limite dans l'inégalité (*). CQFD



ATTENTION : d'après l'exemple 5 ci-dessus, la réciproque est fausse, à savoir :

$$(\sum u_n \text{ converge}) \not\Rightarrow (\sum u_n \text{ converge absolument})$$

Exemple 6 Montrer que : une combinaison linéaire de séries absolument convergentes est elle-même absolument convergente. Autrement dit, montrer que :

si $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes alors : $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \sum (u_n + \lambda v_n)$ est absolument convergente.

Théorème 7 Soit (u_n) une suite complexe, et soit (v_n) une suite d'éléments de $\mathbb{R}^+$.

Si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.

Exemple 7 Soient $u_n = \frac{\ln(n)}{n^3}$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$. On a $\frac{u_n}{v_n} = \frac{\ln(n)}{n} \rightarrow 0$ donc $u_n = o(v_n)$.

Or $\sum v_n$ est absolument convergente (somme de Riemann usuelle). Donc $\sum u_n$ converge.

Exemple 8 1. $v_n = \frac{1}{\sqrt{n} \ln(n)}$ et $u_n = \frac{1}{n}$. Comparer u_n et v_n , et indiquer la nature de $\sum v_n$.

2. Soit $u_n = \frac{\sin(n)}{n^3}$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$. Comparer u_n et v_n , et indiquer la nature de $\sum u_n$.

II Compléments sur les séries à termes réels

II.1 Séries alternées

Définition 6 Une série à termes réels $\sum u_n$ est dite alternée lorsque, pour tout entier naturel n , u_n et u_{n+1} sont de signes contraires. Cela revient à dire que : $(-1)^n u_n$ est de signe constant.

Proposition 7 (Critère spécial des séries alternées) Soit $\sum (-1)^n a_n$ une série alternée.

On suppose que (a_n) est une suite positive décroissante et qui tend vers 0.

On note $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$. Alors :

- La série $\sum (-1)^n a_n$ converge.
- Plus précisément, les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
- Le reste $R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k$ est du signe de son premier terme et lui est inférieur :

$$\text{signe}(R_n) = (-1)^{n+1} \text{ et } \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} (-1)^k a_k \right| \leq a_{n+1}$$

Exemple 9 Donner la nature des séries suivantes : $\sum \frac{(-1)^n}{n}$, $\sum \frac{(-1)^n}{\ln(n)}$.

Exemple 10 On pose $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$.

Vérifier que $u_n \sim v_n$. Quelle est la nature de chaque série ?

II.2 Règle de D'Alembert

Théorème 8 Règle de d'Alembert

On suppose que pour tout $n \neq 0$, $a_n \neq 0$ et que la suite $\left(\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \right)$ a une limite ℓ (finie ou infinie).

- Si $0 \leq \ell < 1$, la série $\sum a_n$ converge absolument.
- Si $\ell > 1$, la série $\sum a_n$ diverge (grossièrement).
- Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure sur la nature de la série $\sum a_n$ par cette méthode.

Exemple 11 Nature de la série de terme général $u_n = \frac{3^n}{\binom{2n}{n}}$?

II.3 Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

Définition 7 Soient (a_n) et (b_n) deux suites de nombres réels ou complexes.

On appelle produit de Cauchy des séries $\sum a_n$ et $\sum b_n$ la série de terme général c_n où

$$\forall n \in \mathbb{N}, c_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^n b_k a_{n-k}.$$

Exemple 12 $a_n = \frac{1}{2^n}$ et $b_n = \frac{1}{3^n}$. Déterminer c_n . Puis comparer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$

Théorème 9 Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont des séries absolument convergentes, alors leur produit de Cauchy $\sum c_n$ est une série absolument convergente, et de plus :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n \right)$$

Exemple 13 Soit x un réel tel que $|x| < 1$. On pose $a_n = b_n = x^n$. Illustrer la proposition précédente avec cet exemple.

Exemple 14 On admet que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Justifier que la série de terme général $c_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 2^{n-k}}$ converge, puis déterminer sa somme.

III Approfondissements

III.1 Utilisation des développements limités

Exemple 15 Soit $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$. On peut remarquer que $|u_n| \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ et donc $\sum u_n$ n'est pas absolument convergente. Un petit calcul de DL donne :

$$u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)^{-(1/2)} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \left(1 - \frac{(-1)^n}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2n\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

Soient $\alpha_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, $\beta_n = \frac{1}{2n\sqrt{n}}$ et $\gamma_n = u_n - \alpha_n - \beta_n = o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.

On peut montrer que $\sum \alpha_n$ converge ... Comment le fait-on ??

$\sum \beta_n$ est une série de Riemann convergente. Enfin $\sum |\gamma_n|$ est une série convergente d'après le théorème 7. Or toute série absolument convergente est convergente donc $\sum \gamma_n$ converge.

En conclusion : $\sum u_n$ est convergente comme somme de 3 séries convergentes.

III.2 Utilisation de séries télescopiques pour étudier des suites

Proposition 8 La suite (u_n) converge si et seulement si la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge.

Application : Soit (u_n) une suite réelle. Pour savoir si la suite (u_n) converge, on peut donc introduire la série de terme général $v_n = u_{n+1} - u_n$, puis déterminer à l'aide des outils sur les séries, si $\sum v_n$ est convergente...

Exemple 16 : On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $h_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. On considère les deux suites $(\gamma_n)_{n \geq 1}$ et $(v_n)_{n \geq 1}$ définies par :

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\gamma_n = h_n - \ln(n)$ et $v_n = \gamma_{n+1} - \gamma_n$.

Montrer que la série de terme général v_n est convergente. En déduire la convergence de la suite $(\gamma_n)_{n \geq 1}$; on note γ sa limite (constante γ d'Euler).

Théorème 10 Formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

III.3 Comparaison avec une série de Riemann ou « règle du $n^\alpha u_n$ »

Exemple 17 Soit $u_n = \frac{\ln(n)}{n^2}$. On remarque que $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 1$.

Par ailleurs : $n^{\frac{3}{2}} \times u_n \rightarrow 0$, donc $u_n = o\left(\frac{1}{n^{(3/2)}}. **Que peut-on en déduire ?**$

Exemple 18 Soit $u_n = \frac{1}{(\ln(n))^2}$.

Calculer $\lim n u_n$. En déduire que : $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N$, $n u_n \geq 1$.

En déduire la nature de $\sum u_n$.

La démarche utilisée dans ces deux exemples peut être résumée dans la propriété ci-dessous, qui n'est pas à retenir absolument car elle est **hors-programme**. Cette démarche ne doit pas non plus être utilisée sans justification. Cela étant dit, on peut chercher un réel α tel que $n^\alpha u_n$ ait une limite intéressante quand $n \rightarrow +\infty$.

Proposition 9 Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

- Si il existe $\alpha > 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)$ est bornée, alors la série $\sum u_n$ converge.
- Si il existe $\alpha \leq 1$ tel que la suite $(n^\alpha u_n)$ converge vers un réel ℓ **non nul** ou diverge vers $+\infty$, alors la série $\sum u_n$ diverge.

Preuve On se donne $\sum u_n$ une série à termes positifs.

- Supposons que : il existe $\alpha > 1$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|n^\alpha u_n| \leq K$, c'est à dire : $\left| \frac{u_n}{\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)} \right| \leq K$.

Ainsi : $u_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$. Par ailleurs $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge absolument car $\alpha > 1$. Donc $\sum u_n$ converge.

- Supposons que : il existe $\alpha \leq 1$ tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = \ell > 0$. Alors $n^\alpha u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \ell$ (car $\ell \neq 0$). Donc $u_n \sim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ell}{n^\alpha}$. Par ailleurs $\frac{\ell}{n^\alpha} \geq 0$ et $\sum \frac{\ell}{n^\alpha}$ diverge car $\alpha \leq 1$. Donc $\sum u_n$ diverge.

- Supposons que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha u_n = +\infty$ avec $\alpha \leq 1$. Alors à partir d'un certain rang, on a $n^\alpha u_n > 1$, donc $u_n > \frac{1}{n^\alpha}$. Comme $\alpha \leq 1$, on sait que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge et donc $\sum u_n$ diverge.

IV BILAN DES OUTILS

• Etude de la nature d'une série.

1. Si u_n ne tend pas vers 0, la série est grossièrement divergente.
2. On essaie de reconnaître une série de référence ou une combinaison linéaire de séries de référence.
3. Si $u_n \in \mathbb{R}$, on regarde si u_n est de signe constant ; si u_n n'est pas de signe constant ou $u_n \in \mathbb{C}$, on sait qu'on peut étudier $|u_n|$ car si $\sum |u_n|$ converge, alors on a convergence (absolue) de $\sum u_n$.
4. Si $u_n \in \mathbb{R}$ est de signe constant, on cherche un équivalent de u_n . Sinon, on cherche un équivalent de $|u_n|$.
5. Critère de d'Alembert : calcul de $\lim \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$. Condition pour pouvoir appliquer ce critère ??
6. Si $u_n > 0$ pour tout n : on calcule $n^\alpha u_n$ et on cherche α de telle sorte que $n^\alpha u_n$ ait une limite ou soit bornée. Cas le plus simple : $n^\alpha u_n \rightarrow \ell \neq 0$ car alors $\sum u_n$ et $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ sont de même nature (règle du $n^\alpha u_n$ ou comparaison avec une série de Riemann).
7. On utilise les développements limités/généralisés.
8. On applique le critère de comparaison : si $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang, alors $\sum v_n$ converge $\implies \sum u_n$ converge, et par contraposée, $\sum u_n$ diverge $\implies \sum v_n$ diverge. Donc, on essaie de majorer/minorer u_n (ou $|u_n|$).
9. On cherche à trouver v_n tel que $\sum v_n$ est absolument convergente et $u_n = o(v_n)$ ou bien $u_n = O(v_n)$.
10. Si le terme général est de la forme $a_n = f(n)$, où f est continue ; positive, monotone, on peut encadrer les sommes partielles par des intégrales.
11. On peut expliciter les sommes partielles $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.
C'est particulièrement intéressant en cas de série télescopique.
Si les u_k sont positifs, on peut appliquer le théorème fondamental : $\sum u_k$ converge si et seulement si la suite (S_n) est majorée.

• Calcul de la somme d'une série convergente.

1. On reconnaît des séries de références, ou on s'y ramène.
2. On revient aux sommes partielles : on écrit $S_n = \sum_{k=n_0}^n u_k$ et on étudie la suite (S_n) .
3. Si le terme général est de la forme $a_n = f(n)$, où f est continue ; positive, monotone, on peut encadrer les sommes partielles par des intégrales.
4. L'énoncé vous guide....