* **Exercice 1** Soit (u_n) une suite de réels strictement positifs. On suppose que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$ avec $\ell \in \mathbb{R}^+$.

1. Montrer que : si $\ell < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
   Montrer que : si $\ell > 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
   Peut-on conclure si $\ell = 1$?
2. Appliquer ces résultats aux exemples qui suivent :
   $u_n = \dfrac{a^n}{n!}$ avec $a \in \mathbb{R}^{+*}$, $v_n = \dfrac{n^n}{n!}$, $w_n = \dfrac{a^n}{n^p}$ avec $a \in \mathbb{R},\ a > 1$ et $p \in \mathbb{N}$.

♡ * **Exercice 2** Pour tout $n \geq 1$, on pose :

$$u_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n} \qquad \text{et} \qquad v_n = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\right) - 2\sqrt{n+1}.$$

Montrer que les deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ convergent vers une limite commune.
En déduire un équivalent simple de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Solution: adjacentes

♡ * **Exercice 3** Déterminer les limites des suites définies par :

1. $u_n = \ln(\text{ch}(n)) - n$
2. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k^2+n^2}$ (penser aux sommes de Riemann)
3. $u_n = \left(2a^{\frac{1}{n}} - 1\right)^n$
4. $u_n = \left(\dfrac{\arctan(n+1)}{\arctan(n)}\right)^{n^2}$.
   Indication : Penser que, pour $x > 0$, on a Arctan(x)+Arctan($1/x$)=...

Solution: Solutions/indications :
1. -ln(2) 2. ln(2)/2 en utilisant les sommes de Riemann
3. a^2 4. Utiliser arctan $(n) = \pi/2 - \arctan(1/n)$, voir ci dessous

Pour le dernier item :

$$\begin{aligned} v_n &= \ln(u_n) = n^2 \arctan\left(\frac{(\pi/2) - \arctan(1/(n+1))}{(\pi/2) - \arctan(1/n)}\right) \\ v_n &\sim n^2\left(\frac{(\pi/2) - \arctan(1/(n+1))}{(\pi/2) - \arctan(1/n)} - 1\right) \end{aligned}$$

donc $v_n \sim ... \sim 2/\pi$ donc $u_n \to e^{2/\pi}$

***Exercice 4** Donner un équivalent simple des suites suivantes : $u_n = \ln(n+\sqrt{n^2+1})$, $v_n = \sin\left(\dfrac{(n^2+n+1)\pi}{n+1}\right)$

Solution: $u_n \sim \ln(n+n) \sim \ln(2n) \sim \ln(n)$.

$v_n = \sin\left(\dfrac{n(n+1)+1}{n+1}\pi\right) = \sin(n\pi + \frac{\pi}{n+1}) = (-1)^n \sin(\frac{\pi}{n+1}) \sim (-1)^n \frac{\pi}{n+1}$

♡ ** **Exercice 5** Donner les limites des suites suivantes :

1. $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$ et $J_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \ln(1+x)dx$.
2. $v_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{x+n}dx$ et $w_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{n\sin(x)}{x+n}dx$

Solution:

1. $0 \leq \dfrac{1}{1+x}$ donc $0 \leq I_n \leq \displaystyle\int_0^1 x^n dx = \left[\dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \dfrac{1}{n+1}$ donc par encadrement, $I_n \to 0$.

   Calcul analogue pour J_n : $0 \leq J_n \leq \ln(2)\displaystyle\int_0^1 x^n dx = \ln(2)\dfrac{1}{n+1} \to 0$ donc $J_n \to 0$.
2. sur $[0,\pi]$, on a $\sin(x) \in [0,1]$ donc

$$0 \leq v_n \leq \int_0^\pi \frac{dx}{x+n} = [\ln(x+n)]_0^\pi = \ln\left(\frac{\pi+n}{n}\right) \to 0$$

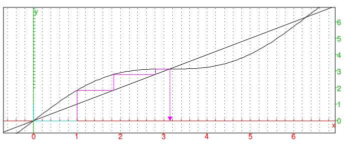
   Et pour w_n, on écrit : $w_n = \displaystyle\int_0^\pi \frac{(n+x-x)\sin(x)}{x+n}dx = \int_0^\pi \sin(x)dx - \int_0^\pi \frac{x\sin(x)}{x+n}dx$. Par majoration, le 2e terme tend vers 0, et le premier est facile...

** **Exercice 6** Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} e^{k^2} \underset{n\to\infty}{\sim} e^{n^2}$.

Solution: $u_n = e^{n^2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} e^{k^2}$ et $0 < \dfrac{\sum_{k=1}^{n-1} e^{k^2}}{e^{n^2}} < \dfrac{1}{e^{n^2}}(n-1)e^{(n-1)^2} = (n-1)e^{-2n+1} = e \times (n-1)e^{-2n} \to 0$. Donc ....

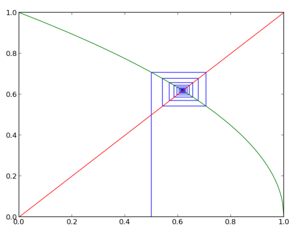
Suites récurrentes

* **Exercice 7** Etudier la suite définie par $u_0 \in [0, 2\pi]$ et $u_{n+1} = u_n + \sin(u_n)$.

Solution:  Soit $f(x) = x + \sin(x)$. On étudie les variations de f.
On étudie $g(x) = f(x) - x$ pour avoir la position de la courbe par rapport à la première biseectrice. C'est sans souci.
Puis f est croissante donc en utilisant le fait que 0 et 2π sont point fixes, on en déduit que $[0, 2\pi]$ est stable par f et même mieux : $[0,\pi]$ et $[\pi, 2\pi]$ sont tous deux stables.
Si u_0 vaut 0 ou π ou 2π, alors la suite est constante. Sinon, pour $u_0 \in]0,\pi[$ la suite est croissante et pour $u_0 \in]\pi, 2\pi[$ elle est décroissante. Et bornée donc convergente. Et elle ne peut converger que vers π.

* **Exercice 8** Etudier la suite définie par : $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \sqrt{1-u_n}$.

Solution:



L'intervalle $[0,1]$ est stable par f. Par ailleurs : $\frac{d}{dx}(\sqrt{1-x}) = \frac{1}{2\sqrt{1-x}}$ donc pas contractante sur $[0,1]$.
On étudie $u_2 - u_0$ qui est positif, donc la suite des u_{2n} est croissante et la suite des u_{2n+1} est décroissante (on montre « $u_{2n+2} - u_{2n} \geq 0$ »par récurrence et idem pour la suite des u_{2n+1}).
La seule solution de $f(x) = x$ dans [0,1] est $\ell = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ qui est supérieur à u_0. On montre sans peine que $u_{2n} \leq \ell$ et $u_{2n+1} \geq \ell$ (récurrence). Les deux suites extraites sont monotones bornées donc convergentes, et ce vers une solution de $f \circ f(x) = x$. Cette équation s'écrit aussi $x(x-1)(x^2+x-1) = 0$. Or la limite ne peut être ni 0, ni 1, donc c'est la racine de $(x^2+x-1) = 0$ qui est ℓ. Donc les deux suites convergente vers ℓ etc...

Suites définies de manière implicite

♡** **Exercice 9** Pour $n \geq 1$, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n + x - 1$.

1. Montrez que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une et une seule solution x_n dans l'intervalle $[0, +\infty[$.
2. Montrez que : $\forall n \geq 1$, on a $x_n < 1$.
3. Calculer $f_{n+1}(x_n)$. En déduire que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Conclure sur la convergence éventuelle de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que $\lim x_n = 1$.
5. Dans la suite de l'exercice, on note $\alpha_n = 1 - x_n$.
   (a) Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(1-\alpha_n)}{\alpha_n} = -1$. Puis montrer que : $n\alpha_n \sim -\ln(\alpha_n)$.
   (b) Quelle est la limite de $-\ln(\alpha_n)$? En déduire enfin que : $-\ln(n) \sim \ln(\alpha_n)$, puis un équivalent simple de α_n.

Solution:

1. $f_n'(x) = nx^{n-1} + 1 > 0$ donc fonction strictement croissante et continue. Donc f_n réalise une bijection de $I = [0, +\infty[$ vers $J = [f_n(0), \lim\limits_{+\infty} f_n[= [-1, +\infty[$. Or $0 \in J$ donc 0 a un unique antécédent par f_n dans $I = [0, +\infty[$. CQFD.
2. $f_n(x_n) = 0 < 2 = f_n(1)$. Or f_n est strictement croissante donc $x_n < 1$.
3. $f_{n+1}(x_n) = x_n^{n+1} + x_n - 1 = x_n^{n+1} - x_n^n$ car $-x_n^n = x_n - 1$.
   Donc $f_{n+1}(x_n) = x_n^n(x_n - 1) < 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$. Or f_{n+1} est strictement croissante donc $x_n < x_{n+1}$.
   La suite (x_n) est donc croissante et majorée par 1. Donc elle converge. Soit $\ell = \lim x_n$.
   Comme $\forall n,\ 0 \leq x_n < 1$, alors par passage à la limite, $0 \leq \ell \leq 1$.
   Supposons que $\ell \neq 1$. Alors, la suite (x_n) étant croissante, on en déduit que $\forall n,\ 0 \leq x_n \leq \ell < 1$ et donc que $\forall n,\ 0 \leq x_n^n \leq \ell n \to 0$ et donc $x_n^n \to 0$. En reportant dans l'équation, on obtient $x_n - 1 \to 0$ ce qui donne $\ell = 1$ et on a une contradiction avec l'hypothèse. Donc $\ell = 1$.
4. (a) $x_n \to 1 \Rightarrow \alpha_n \to 0$ et donc $\dfrac{\ln(1-\alpha_n)}{-\alpha_n} \to 1$.
   (b) $x_n^n = 1 - x_n$ et $x_n > 0$ (car $f_n(0) \neq 0$). Donc $n\ln(x_n) = \ln(1 - x_n) = \ln(\alpha_n)$ $(\star)$.
   Or $x_n = 1 - \alpha_n \to 1$. Donc $\ln(x_n) \sim -\alpha_n$.
   Donc $(\star) \Rightarrow -n\alpha_n \sim \ln(\alpha_n)$.
   (c) $-\ln(\alpha_n) \to +\infty$ car $\alpha_n \to 0$.
   (d) On sait que : si (a_n) et (b_n) sont des suites à termes strictement positifs telles que $a_n \sim b_n$ et $\lim a_n = +\infty$, alors $\ln(a_n) \sim \ln(b_n)$. Ici $-\ln(\alpha_n) \sim n\alpha_n$ et $\lim -\ln(\alpha_n) = +\infty$.
   Donc $\ln(-\ln(\alpha_n)) \sim \ln(n\alpha_n) \sim \ln(n) + \ln(\alpha_n)$.
   Donc $\dfrac{\ln(-\ln(\alpha_n))}{-\ln(\alpha_n)} \sim \dfrac{\ln(n) + \ln(\alpha_n)}{-\ln(\alpha_n)}$ (car $\dfrac{\ln(X)}{X} \underset{X\to+\infty}{\to 0}$).
   Donc $\ln(n) + \ln(\alpha_n) = o(-ln(\alpha_n))$ c'est à dire $\ln(n) \sim -\ln(\alpha_n)$.
   On avait : $n\alpha_n \sim -\ln(\alpha_n)$ d'après (b). Ici on en déduit que $n\alpha_n \sim \ln(n)$ d'où $\alpha_n \sim \dfrac{\ln(n)}{n}$.
   Conclusion : $x_n = 1 - \alpha_n = 1 - \left(\dfrac{\ln(n)}{n} + o\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)\right)$ ce qui s'écrit :

$$x_n = 1 - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)$$

♡** **Exercice 10** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction ϕ_n définie pour $x \in [n\pi, n\pi + \pi/2[$ par : $\phi_n(x) = \tan(x) - x$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique réel $x_n \in [n\pi, n\pi + \pi/2[$ tel que $\tan(x_n) = x_n$. (Indication : pour tout n, on pourra étudier les variations de ϕ_n)
2. Montrer que $x_n \sim n\pi$.
3. On pose $v_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} - x_n$. Calculer $\tan(v_n)$. En déduire que $v_n = \arctan\left(\dfrac{1}{x_n}\right)$ et que $v_n \sim \dfrac{1}{n\pi}$, puis que $x_n = n\pi + \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{n\pi} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Solution: Correction succincte

1. Soit $n \geq 1$. On étudie $\phi_n(x) = \tan(x) - x$ sur $I_n = [n\pi, n\pi + \pi/2[$.
   $\phi_n'(x) = 1+\tan^2(x)-1 = \tan^2(x) > 0$ pour $x \in]n\pi, n\pi+\pi/2[$. Donc ϕ_n continue et strictemment croissante sur I_n.
   Par ailleurs $\lim\limits_{x\to n\pi+\pi/2} \phi_n(x) = +\infty$ et $\phi_n(n\pi) = -n\pi < 0$.
   Donc d'après le théorème de la bijection, ϕ_n réalise une bijection de I_n vers $J_n = [-n\pi, +\infty[$. Or $0 \in J_n$. Donc 0 a un unique antécédent par ϕ_n. CQFD.
2. Par définition : $n\pi \leq x_n \leq \pi/2 + n\pi$ donc $1 \leq \dfrac{x_n}{n\pi} \leq 1 + \dfrac{1}{2n}$. Par th. d'encadrement, $\lim \dfrac{x_n}{n\pi} = 1$ donc $x_n \sim n\pi$.
3. $n\pi \leq x_n \leq \pi/2 + n\pi \Rightarrow 0 \leq v_n \leq \pi/2$.
$$\tan(v_n) = \tan(n\pi + \pi/2 - x_n) = \tan(\pi/2 - x_n) = \frac{1}{tan(x_n)} = \frac{1}{x_n}$$
   Conclusion : $v_n \in [0, \pi/2[$ et $\tan(v_n) = 1/x_n$ donc $v_n = \arctan(1/x_n)$.
   $x_n \sim n\pi \Rightarrow \dfrac{1}{x_n} \sim \dfrac{1}{n\pi} \to 0 \Rightarrow \arctan(1/x_n) \sim 1/x_n \sim 1/(n\pi) \Rightarrow v_n \sim 1/(n\pi)$
   Cela signifie que $v_n = 1/(n\pi) + o(1/(n\pi)) = 1/(n\pi) + o(1/n)$
   $x_n = n\pi + \pi/2 - v_n = n\pi + \pi/2 - 1/n + o(1/n)$

Exercices d'oral

Exercice 11

1. On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
   Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
2. Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de : $u_n = \text{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Solution:

1. Par hypothèse, $\exists\, N_0 \in \mathbb{N} / \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_0 \Longrightarrow v_n \neq 0$.
   Ainsi la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est définie à partir du rang N_0.
   De plus, comme $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$.
   Alors, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}/N \geqslant N_0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \left|\dfrac{u_n}{v_n} - 1\right| \leqslant \varepsilon$. (1)
   Prenons $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. Fixons un entier N vérifiant (1).
   Ainsi, $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \left|\dfrac{u_n}{v_n} - 1\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   C'est-à-dire, $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow -\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{u_n}{v_n} - 1 \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   On en déduit que $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \dfrac{u_n}{v_n} \geqslant \dfrac{1}{2}$.
   Et donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \dfrac{u_n}{v_n} > 0$.
   Ce qui implique que u_n et v_n sont de même signe à partir du rang N.

2. Au voisinage de $+\infty$, $\text{sh}(\dfrac{1}{n}) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{6n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$ et $\tan\dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{3n^3} + o\left(\dfrac{1}{n^3}\right)$. Donc $u_n \underset{+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{6n^3}$.
   On en déduit, d'après 1., qu'à partir d'un certain rang, u_n est négatif.

Exercice 12 Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On définit la suite (u_n) par $u_0 = x_0$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$.

1. (a) Démontrer que la suite (u_n) est monotone et déterminer, en fonction de la valeur de x_0, le sens de variation de (u_n).
   (b) Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. Déterminer l'ensemble des fonctions h, continues sur $\mathbb{R}$, telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\text{Arctan}\, x)$.

Solution: On pose $f(x) = \text{Arctan}\, x$.

1. (a) **Premier cas** : Si $u_1 < u_0$
Puisque la fonction $f : x \mapsto \text{Arctan}\, x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors $\text{Arctan}(u_1) < \text{Arctan}(u_0)$ c'est-à-dire $u_2 < u_1$.
Par récurrence, on prouve que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} < u_n$. Donc la suite (u_n) est strictement décroissante.
Deuxième cas : Si $u_1 > u_0$
Par un raisonnement similaire, on prouve que la suite (u_n) est strictement croissante.
Troisième cas : Si $u_1 = u_0$
La suite (u_n) est constante.
Pour connaître les variations de la suite (u_n), il faut donc déterminer le signe de $u_1 - u_0$, c'est-à-dire le signe de $\text{Arctan}(u_0) - u_0$.
On pose alors $g(x) = \text{Arctan} x - x$ et on étudie le signe de la fonction g.
On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \dfrac{-x^2}{1+x^2}$ et donc $\forall\, x \in \mathbb{R}^*$, $g'(x) < 0$.
Donc g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ et comme $g(0) = 0$ alors :
$\forall x \in]0, +\infty[$, $g(x) < 0$ et $\forall x \in]-\infty, 0[$, $g(x) > 0$.
On a donc trois cas suivant le signe de x_0 :
- Si $x_0 > 0$, la suite(u_n) est strictement décroissante.
- Si $x_0 = 0$, la suite (u_n) est constante.
- Si $x_0 < 0$, la suite(u_n) est strictement croissante.

   (b) La fonction g étant strictement décroissante et continue sur $\mathbb{R}$, elle induit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $g(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.
0 admet donc un unique antécédent par g et, comme $g(0) = 0$, alors 0 est le seul point fixe de f.
Donc si la suite (u_n) converge, elle converge vers 0, le seul point fixe de f.
Premier cas : Si $u_0 > 0$
L'intervalle $]0, +\infty[$ étant stable par f, on a par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. Donc la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0, donc elle converge et ce vers 0, unique point fixe de f.
Deuxième cas : Si $u_0 < 0$
Par un raisonnement similaire, on prouve que (u_n) est croissante et majorée par 0, donc elle converge vers 0.
Troisième cas : Si $u_0 = 0$
La suite (u_n) est constante.

   Conclusion : $\forall\, u_0 \in \mathbb{R}$, (u_n) converge vers 0.

2. Soit h une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que, $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = h(\text{Arctan}\, x)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.
Considérons la suite (u_n) définie par $u_0 = x$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \text{Arctan}(u_n)$.
On a alors $h(x) = h(u_0) = h(\text{Arctan}(u_0)) = h(u_1) = h(\text{Arctan}(u_1)) = h(u_2) = \dots$.
Par récurrence, on prouve que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $h(x) = h(u_n)$.
De plus $\lim\limits_{n \to +\infty} h(u_n) = h(0)$ par convergence de la suite (u_n) vers 0 et par continuité de h.
On obtient ainsi : $h(x) = h(0)$ et donc h est une fonction constante.
Réciproquement, toutes les fonctions constantes conviennent.
Conclusion : Seules les fonctions constantes répondent au problème.

Exercice 13 Soit a un nombre complexe.
On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :
$\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(\text{i}a - 1)u_n$ avec $(u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2$.

1. (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
   (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.
2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.
Indication : discuter suivant les valeurs de a.

Solution:

1. (a) Montrons que E est un sous-espace-vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
La suite nulle appartient à E (obtenue pour $(u_0, u_1) = (0, 0)$).
Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de E. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$.

Montrons que $w = u + \lambda v \in E$.
On a $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_n + \lambda v_n$.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
$w_{n+2} = u_{n+2} + \lambda v_{n+2}$.
Or $(u, v) \in E^2$, donc $w_{n+2} = 2au_{n+1} + 4(ia - 1)u_n + \lambda\left(2av_{n+1} + 4(ia - 1)v_n\right)$
c'est-à-dire $w_{n+2} = 2a\left(u_{n+1} + \lambda v_{n+1}\right) + 4(ia - 1)\left(u_n + \lambda v_n\right)$
ou encore $w_{n+2} = 2aw_{n+1} + 4(ia - 1)w_n$.
Donc $w \in E$.
Donc E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.

(b) On considère l'application φ définie par :
$$\varphi : \begin{array}{lcl} E & \longrightarrow & \mathbb{C}^2 \\ u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_0, u_1) \end{array}$$
Par construction, φ est linéaire et bijective.

Donc φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
On en déduit que $\dim E = \dim \mathbb{C}^2 = 2$.

2. Il s'agit d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants.
On introduit l'équation caractéristique (E) : $r^2 - 2ar - 4(ia - 1) = 0$.
On a deux possibilités :

— si (E) admet deux racines distinctes r_1 et r_2, alors $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha r_1^n + \beta r_2^n$ avec (α, β) que l'on détermine à partir des conditions initiales.

— si (E) a une unique racine double r, alors $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\alpha n + \beta)r^n$ avec (α, β) que l'on détermine à partir des conditions initiales.

Le discriminant réduit de (E) est $\Delta' = a^2 + 4ia - 4 = (a + 2i)^2$.
Premier cas : $a = -2i$

$r = a = -2i$ est racine double de (E).
Donc, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = (\alpha n + \beta)(-2i)^n$.
Or $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$, donc $1 = \beta$ et $1 = (\alpha + \beta)(-2i)$.

On en déduit que $\alpha = \dfrac{i}{2} - 1$ et $\beta = 1$.

Deuxième cas : $a \neq -2i$
On a deux racines distinctes $r_1 = 2(a + i)$ et $r_2 = -2i$.
Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n = \alpha\left(2(a + i)\right)^n + \beta\left(-2i\right)^n$.
Or $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$, donc $\alpha + \beta = 1$ et $2(a + i)\alpha - 2i\beta = 1$.

On en déduit, après résolution, que $\alpha = \dfrac{1 + 2i}{2a + 4i}$ et $\beta = \dfrac{2a + 2i - 1}{2a + 4i}$.