1 Généralités, dérivation

$\star$ **Exercice 1** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f \in \mathcal{F}(I, \mathbb{R})$, dérivable. Montrer que si f' a un extremum local en $x_0 \in I$, alors la courbe représentative de f traverse sa tangente en x_0.

$\heartsuit\star\star$ **Exercice 2** Soit P un polynôme de degré n à coefficients réels qui possède n racines réelles distinctes. Montrer que P' possède $n-1$ racines réelles distinctes.

Solution: On note $a_1 < a_2 < ... < a_n$ les racines de P. On applique le théorème des accroissements finis entre a_i et a_{i+1} : il existe $b_i \in]a_i, a_{i+1}[$ tel que $P'(b_i) = 0$. Comme les intervalles $]a_i, a_{i+1}[$ sont disjoints, les a_i sont distincts et $b_1 < ... < b_{n-1}$.
NB : Peu peut recommencer : P' a $n-1$ racines distinctes, P'' a $n-2$ racines distinctes,$P^{(3)}$ a $n-3$ racines distinctes, ..., $P^{(n-1)}$ a une racine.

$\heartsuit\star\star\star$ **Exercice 3**

1. Soit $a < b$ et f une fonction p fois dérivable sur $]a, b[$ qui admet $p+1$ zéros distincts dans $]a, b[$.
   Montrer que $\exists x \in]a, b[,\ f^{(p)}(x) = 0$.
2. Soit P un polynôme à coefficients dans $\mathbb{R}$.
   Montrer que l'équation $P(x) = e^x$ admet au plus un nombre fini de solutions sur $\mathbb{R}$.
   On précisera le nombre maximal de solutions en fonction du degré de P.

Solution:

1. On note $a_1 < a_2 < ... < a_n$ les zéros de f. On applique le théorème des accroissements finis entre a_i et a_{i+1} : il existe $b_i \in]a_i, a_{i+1}[$ tel que $f'(b_i) = 0$. Comme les intervalles $]a_i, a_{i+1}[$ sont disjoints, les a_i sont distincts et $b_1 < ... < b_{n-1}$.
   On recommence : f' a $n-1$ zéros distincts, f'' a $n-2$ zéros distincts,$f^{(3)}$ a $n-3$ zéros distincts, ..., $f^{(n-1)}$ a un zéro (au moins).
2. Posons $f(x) = P(x) - \exp(x)$. Si P est un polynôme constant : au plus une solution (la fonction exp est injective). Si $\deg(P) = d \geq 1$, alors l'équation a au plus $d+1$ solutions. En effet, supposons qu'il y ait $d+2$ solutions. Alors f aurait $d+2$ zéros, donc $f^{(d+1)}$ aurait au moins un zéro. Or $\deg(P) = d \Rightarrow P^{(d+1)} = 0$ donc $\forall x,\ f^{(p+1)}(x) = -\exp(x) \neq 0$. Impossible.

$\heartsuit\star$ **Exercice 4** Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que $f(0) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
Le but de l'exercice est de montrer que : $\exists x \in \mathbb{R}^+$ tel que : $f'(x) = 0$.
On pose : $g(x) = f(\tan(x))$ pour $x \in [0, \pi/2[$ et $g(\Pi/2) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = f(0)$.
Vérifier que g est continue sur $[0, \pi/2]$ et dérivable sur $]0, \pi/2[$, puis conclure.
Peut-on généraliser ce résultat ?

Solution: La fonction g est continue sur $[0, \pi/2]$ et dérivable sur $]0, \pi/2[$. Donc d'après le TAF, il existe $c \in]0, \pi/2[$ tel que $g'(c) = 0$. Or $g'(c) = (1 + \tan^2(c))f'(\tan(c))$. Comme $(1 + \tan^2(c)) \neq 0$, on en déduit que $f'(\tan(c)) = 0$. On pose $X = \tan(c)$. On remarque que $X \in \mathbb{R}^+$ et $f'(X) = 0$.
C'est un TAF généralisé. On pourrait aussi le montrer avec f continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \ell$ en prenant $g(x) = f(\tan(x))$ pour $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ et $g(-\pi/2) = g(\pi/2) = \ell$.

$\star\star$ **Exercice 5** Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles, de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ (f \circ f)(x) = \frac{x}{2} + 3.$$

a) Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(\frac{x}{2} + 3) = \frac{f(x)}{2} + 3$.
b) En déduire que f' est constante puis déterminer f.

Solution: Raisonnement par analyse-synthèse.
a) Si f est solution alors $f(x/2+3) = f(f\circ f(x)) = f\circ f(f(x) = f(x)/2+3$.
b) On pose $g(x) = f(x/2+3) = f(x)/2+3$.
En dérivant g on obtient $(1/2)f'(x/2+3) = f'(x)/2$ donc $f'(x/2+3) = f'(x)$.
On réitère, en appliquant l'égalité ci dessus à $x_1 = (x/2+3)$: $f'(x) = f'(x/2+3) = f'((x/2+3)/2+3) = f'(x/4+3/2+3)$.
Puis on en déduit $f'(x) = f'((x/4+3/2+3)/2+3) = f'(x/4+3/4+3/2+3)$.
Et par récurrence : $f'(x) = f'(x/2^n + 3/2^{n-1} + \cdots + 3/2 + 3) = f'(x/2^n + 3(1+1/2+1/2^2+ ... + 1/2^{n-1}))$ et en faisant tendre n vers l'infini, par continuité de f' on a $f'(x) = f'(6)$.
Conclusion : si f est solution alors pour tout x, $f'(x) = f'(6)$. Donc il existe a et b tels que $\forall x,\ f(x) = ax+b$.
Réciproquement, si $f(x) = ax+b$ pour tout x, alors en reportant dans l'équation : $f\circ f(x) = a^2x+ab+b$ et $f\circ f(x) = x/2+3$ donc ...$a = \pm 1/\sqrt{2}$ et $b = 3/(a+1)$. On a donc deux fonctions solutions.

♡⋆ **Exercice 6** Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{e^{u_n}}{u_n+2}$.
a) Soit $f : x \to \frac{e^x}{x+2}$. Calculer f', f''. Construire le tableau de variation de f et préciser $f([0,1])$.
b) Justifier : $\forall x \in [0;1]\quad \frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$.
c) Etablir que l'équation $f(x) = x$ admet, sur $[0,1]$, une unique solution notée α.
d) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 1$. En déduire que si (u_n) converge, alors sa limite est α.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{2}{3}|u_n-\alpha|$, en déduire $|u_n-\alpha| \leq (\frac{2}{3})^n$. Conclure.
e) Donner une valeur de n telle que u_n soit une valeur approchée de α à 10^{-4} près.

Solution: *a)* $f'(x) = ... = \dfrac{(x+1)e^x}{(2+x)^2}$ et $f'(x) > 0 \iff x > -1$.
$$f''(x) = .. = \frac{e^x}{(2+x)^3}\underbrace{\left(x^2+2x+2\right)}_{\Delta<0}$$

x	$-\infty$		-2	-2		-1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$				$+$	$+$	
$f'(x)$		$-$			$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{1}{e^2}$	$\nearrow$	$+\infty$

b) D'après le signe de f'', on sait que f' est croissante sur $[0,1]$ donc
$$x \in [0,1] \Rightarrow f'(0) \leq f'(x) \leq f'(1) \Rightarrow f'(x) \in [1/4, 2/3] \subset [0,1]$$
car $0 < e < 3$.
c) f est croissante sur $[0,1]$ donc $f([0,1]) \subset [1/2, e/3$ car $0 < e < 3$.
Posons $\phi(x) = f(x) - x$. Or pour $x \in [0,1]$, on sait que $f'(x) \in [1/4, 2/3]$ donc $f'(x) - 1 < 0$. On en déduit que ϕ est strictement décroissante et continue sur $[0,1]$, ce qui permet d'appliquer le théorème de la bijection. Donc ϕ réalise une bijection de $[0,1]$ vers $J = [\phi(1), \phi(0)] = [(e/3)-1, 1/2]$. Or $(e/3)-1 < 0$ et $1/2 > 0$. Donc l'équation $\phi(x) = 0$ admet une seule solution α sur $[0,1]$ (car 0 a un seul antécédent par ϕ).
d) $u_n = 1/2 \in [0,1]$ et $[0,1]$ est stable par f d'arès la question précédente. Donc par une récurrence immédiate, (u_n) est bien définie et $\forall n,\ u_n \in [0,1]$.
Par ailleurs f est continue sur $[0,1]$. Donc si (u_n) converge vers ℓ, en faisant tendre n vers l'infini dans l'égalité $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient $\ell = f(\ell)$ et $\ell \in [0,1]$. Donc d'après la question précédente, $\ell = \alpha$. (unicité de α)
La fonction f est continue et dérivable sur $[0,1]$ donc en appliquant le TAF entre u_{n+1} et α, on obtient
$$\exists c \in [0,1] \text{ tel que } |u_{n1} - \alpha| = |f'(c)| \times |u_n - \alpha|$$
Or $c \in [0,1] \Rightarrow |f'(c)| \leq 2/3$ donc $|u_{n1}-\alpha| \leq (2/3)|u_n - \alpha|$. Par récurrence, on obtient $|u_n - \alpha| \leq (\frac{2}{3})^n |u_0 - \alpha| \leq (\frac{2}{3})^n$. Or $(2/3) \in [0,1[$ donc $(\frac{2}{3})^n \underset{n\to+\infty}{\to 0}$, donc par encadrement $|u_n-\alpha| \underset{n\to+\infty}{\to 0}$ c'est à dire $\lim u_n = \alpha$.
e) pour que $|u_n - \alpha| \leq 10^{-4}$, il suffit que $(\frac{2}{3})^n \leq 10^{-4}$ c'est à dire ... $n \geq \dfrac{4\ln(10)}{\ln(3)-\ln(2)}$ c'est à dire $n \geq 22.7$ donc $n \geq 23$.

2 Dérivées n-ièmes

♡⋆ **Exercice 7** Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}$ la dérivé n-ième des fonctions suivantes :

1. Soit $k \in \mathbb{Z}$. $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^k$
2. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto (x^3 + x^2 + 1)e^{-x}$ Penser à la formule de Leibniz
3. $f :]-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{2x+3}{(x-1)(x+1)}$
4. $f :]1, 2[\longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \dfrac{1}{x^2 - 3x + 2}$ *Ecrire $f(x)$ sous la forme* $\dfrac{a}{(x-1)} + \dfrac{b}{x-2}$.
5. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \sin(3x)\cos(2x)$

♡⋆⋆ **Exercice 8**

1. Montrer que la fonction $f = \text{Arctan}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et que $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(x^2+1)^n}$ où P_n est une fonction polynomiale. On précisera une relation liant P_n et P_{n+1}.
   Facultatif : on précisera le degré et le coefficient dominant de P_n. dont on précisera le degré.
2. Montrer que $(1 + x^2)f''(x) + 2xf'(x) = 0$ et en déduire une relation liant P_{n-1}, P_n et P_{n+1} pour $n > 1$.
3. En déduire que, pour $n \geq 1$, on a : $(x^2 + 1)P_n''(x) - 2(n-1)xP_n'(x) + n(n-1)P_n(x) = 0$

Solution:

(a) On sait que la fonction Arctan est dérivable et que sa dérivée vaut $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. Or cette dernière fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ (c'est une fraction rationnelle. Donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
On a $f'(x) = \dfrac{1}{x^2+1} = \dfrac{P_1(x)}{(x^2+1)^1}$ où $P_1 = 1$ est un polynôme de degré 0.
$f''(x) = \dfrac{-2x}{(1+x^2)^2}$.
Posons H_n : Il existe un polynôme P_n de degré $n-1$) tel que $f^{(n)}(x) = \dfrac{P_n(x)}{(1+x^2)^n}$.
H_1 et H_2 sont vraies d'après ce qui précède.
$\boxed{\text{Supposons } H_n \text{ vraie pour un certain } \underline{n \geq 2}}$. Alors

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{(1+x^2)^n P_n'(x) - P_n(x) \times n2x(1+x^2)^{n-1}}{(1+x^2)^{2n}} \\ &= \frac{(1+x^2)P_n'(x) - P_n(x) \times n2x}{(1+x^2)^{n+1}} \end{aligned}$$

La fonction $x \mapsto (1+x^2)P_n'(x) - P_n(x) \times n2x$ est bien polynomiale. Notons la P_{n+1}.
On a établi que H_{n+1} est vraie. Ansi par récurrence, H_n est vraie pour tout n et

$$P_{n+1} = (1 + X^2)P_n' - 2nXP_n.$$

Pour avoir le degré de P_{n+1}, il faut étudier plus précisément le terme de plus haut degré. On remarque que $P_1(x) = 1$, $P_2(x) = -2x$, $P_3(x) = ... = 6x^2 - 1$.
C'est vrai pour $n = 1$ et pour $n = 2$.
La relation de récurrence permet de dire que le terme dominant de P_{n+1} est

$$((-1)^{n-1}n! \times (n-1)x^{n-2+2} - \left((-1)^{n-1}n! \times 2n \times x^{n-1+1}\right) = (-1)^{n-1}n! \times x^n \times (n-1-2n) = (-1)^n(n+1)!x^n$$

Ainsi, pour tout n, P_n est $n-1$.

(b) $(1+x^2)f''(x) + 2xf'(x) = (1+x^2)\dfrac{(-2x)}{(1+x^2)^2} + 2x\dfrac{1}{(1+x^2)} = 0.$
On dérive $n-1$ fois cette relation ; plus précisément, on dérive $(1+x^2)f''(x)$ et $2xf'(x)$ en utilisant la relation de Leibniz :

$$\begin{aligned} \frac{d^{n-1}((1+x^2)f''(x))}{dx^{n-1}} &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (1+x^2)^{(k)} f^{(n-1-k+2)}(x) \\ &= (1+x^2)f^{(n+1)}(x) + (n-1)2xf^{(n)}(x) + \frac{(n-1)(n-2)}{2} 2f^{(n-1)}(x) \\ &= \frac{P_{n+1}(x) + 2(n-1)P_n(x) + (n-1)(n-2)(1+x^2)P_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^{n-1}(2xf'(x))}{dx^{n-1}} &= 2xf^{(n)}(x) + (n-1)2f^{(n-1)}(x)\\ &= \frac{2xP_n(x) + (1+x^2)2(n-1)P_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n}\end{aligned}$$

Ainsi la relation « $(1+x^2)f''(x) + 2xf'(x) = 0$ »dérivée n fois donne, après simplification :

$$P_{n+1}(x) + 2nxP_n(x) + n(n-1)(1+x^2)P_{n-1}(x) = 0$$

D'après la première question, on a :

$$P_{n+1} = (1+X^2)P_n' - 2nXP_n. \tag{1}$$

Par ailleurs, on vient de montrer que :

$$P_{n+1}(x) = -2nxP_n(x) - n(n-1)(1+x^2)P_{n-1}(x) = 0 \tag{2}$$

En soustrayant ces deux équations, on obtient :

$$(1+X^2)P_n' - 2nXP_n = -2nXP_n - n(n-1)(1+X^2)P_{n-1}$$

c'est à dire :

$$P_n' = -n(n-1)P_{n-1} \tag{3}$$

Ceci étant vrai pour tout $n \geq 1$, on peut remplacer n par $n+1$ et on obtient

$$P_{n+1}' = -n(n+1)P_n$$

Par ailleurs, en dérivant l'équation (1), il vient :

$$(x^2+1)P_n''(x) - 2(n-1)xP_n'(x) - 2nP_n(x) - P_{n+1}'(x) = 0.$$

et en utilisant l'équation (3), on obtient

$$(x^2+1)P_n''(x) - 2(n-1)xP_n'(x) + n(n-1)P_n(x) = 0$$

3 Etudes locales

♡⋆ **Exercice 9** Déterminer les limites éventuelles en 0 des fonctions suivantes :

1. $f(x) = \dfrac{a^x - b^x}{x}$ $(a, b \in \mathbb{R}_+^*)$
2. $f(x) = \dfrac{e^{\sin(x)} - e^{\tan(x)}}{\sin(x) - \tan(x)}$

Solution:

1. $f(x) = \dfrac{a^x - b^x}{x} = \dfrac{a^x - -1 - (b^x - 1)}{x} \dfrac{a^x - b^x}{x} \to \ln(a/b)$
2. $f(x) = \dfrac{e^{\sin(x)} - e^{\tan(x)}}{\sin(x) - \tan(x)} = e^{\tan(x)} \dfrac{e^{\sin(x) - \tan(x)} - 1}{\sin(x) - \tan(x)} \to 1$

♡⋆ **Exercice 10** Donner un équivalent simple des expressions suivantes.

1. $\sin(x) \times \dfrac{\ln(1+x^2)}{x\tan(x)}$ quand x tend vers 0.
2. $\dfrac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$ quand $x \to 0$ (a et b réels fixés, non nuls).
3. $(\cos(x))^{\frac{1}{\sin^2(x)}}$ quand x tend vers 0.
4. Donner un équivalent simple de tan au voisinage de $\Pi/2$.
5. $|\tan(x)|^{\cos(x)}$ quand x tend vers $\Pi/2$.

Solution:

1. $\sin(x)\dfrac{\ln(1+x^2)}{x\tan(x)} \underset{x\to 0}{\sim} x$
2. $\dfrac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{a^2}{b^2}$
3. $(\cos(x))^{\frac{1}{\sin^2(x)}} \underset{x\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{e}}$
4. $\tan(\pi/2 + h) \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{1}{h}$
5. $|\tan(x)|^{\cos(x)} \underset{x\to \pi/2}{\sim} 1$

♡⋆ **Exercice 11** Donner la limite en 0 des fonctions suivantes (si cette limite existe) :

1. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x^2)}{x\tan(x)}$
2. $f(x) = \dfrac{1 - \exp(-x)}{\sin(x)}$
3. $f(x) = \dfrac{x\sin x}{1 - \cos x}$
4. $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\ln(1+x)}$
5. $f(x) = \dfrac{\exp(\sqrt{1+\sin x}) - e}{\tan x}$
6. $f(x) = x^{(x^x)}$, $g(x) = (x^x)^x$
7. $f(x) = \dfrac{x\ln^4 x}{\tan(\sqrt{x})}$
8. $f(x) = \dfrac{\exp(\frac{1}{\ln x}) - 1}{x}$
9. $f(x) = \dfrac{\sin 2x - \sin x}{\tan^2 x}$
10. $f(x) = \dfrac{\sqrt{\cos x} - 1}{\exp(x^2) - 1}$

Solution:

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x^2)}{x\tan(x)} = 1$
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1 - \exp(-x)}{\sin(x)} = 1$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\sin x}{1 - \cos x} = 2$
4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x^2} - 1}{\ln(1+x)} = 0$
5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\exp(\sqrt{1+\sin x}) - e}{\tan x} = e/2$
6. $f(x) = x^{(x^x)} \to 0, \quad g(x) = (x^x)^x \to 1$
7. $f(x) = \dfrac{x\ln^4 x}{\tan(\sqrt{x})} \to 0$
8. $f(x) = \dfrac{\exp(\frac{1}{\ln x}) - 1}{x} \to -\infty$

9. $f(x) = \dfrac{\sin 2x - \sin x}{\tan^2 x} \to +\infty$ 10. $f(x) = \dfrac{\sqrt{\cos x} - 1}{\exp(x^2) - 1} \to -1/4$ (qtité conjuguée)

♡⋆ **Exercice 12** Déterminer un équivalent simple en $+\infty$ de : $\exp\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{x(x+1)}{1+x^2}$

Solution: On écrit : $\exp\left(\dfrac{1}{x}\right) = 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$.

Par ailleurs : $\dfrac{x(x+1)}{1+x^2} = \dfrac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1-\dfrac{1}{x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right) = 1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$

Ainsi $\exp\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{x(x+1)}{1+x^2} = \left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{2x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right) - \left(1 + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)\right)$

Donc $\exp\left(\dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{x(x+1)}{1+x^2} \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{3}{2x^2}$

♡⋆ **Exercice 13** **Vrai ou faux ?**

1. $n + \sin n = o(n^2)$
2. $\left(\dfrac{10}{9}\right)^n = o(n^3)$
3. $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+\sqrt{n}} \sim 0$
4. $\ln(x) + x \underset{0}{\sim} x$
5. $\dfrac{e^{-x}}{2x^2} \underset{+\infty}{\sim} e^{-x}$
6. $\dfrac{\ln(x)}{x^2-1} \underset{1}{\sim} \dfrac{1}{2}$
7. $\ln(x)e^{4x} \underset{+\infty}{\sim} e^{4x}$
8. $\ln(x) + e^{4x} \underset{+\infty}{\sim} e^{4x}$
9. $\exp(x^2+1) \underset{x\to+\infty}{\sim} \exp(x^2)$

Solution:
1. vrai
2. faux
3. $\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+\sqrt{n}} \sim \dfrac{1}{n\sqrt{n}}$
4. faux
5. faux
6. vrai
7. faux
8. vrai
9. faux

⋆⋆ **Exercice 14** Calculer les développements limités suivants.

1. $DL_3(1)$ de $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.
2. $DL_3(0)$ de $f(x) = \dfrac{x}{\exp(x)-1}$.
3. $DL_2(0)$ de $f(x) = \exp(\dfrac{x}{\cos(x)})$.
4. $DL_3(0)$ de $f(x) = \ln(1 + x + \sqrt{1+x})$.
5. $DL_2(+\infty)$ de $f(x) = \ln(x^2+2x+3) - \ln(x^2+x+1)$.
6. $DL_3(+\infty)$ de $f(x) = \ln(x\tan(1/x))$.
7. $DL_2(\Pi/4)$ de $f(x) = \sqrt{\tan(x)}$.
8. $DL_2(1)$ de $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$.
9. $DL_2(2\Pi)$ de $f(x) = \sin(\sqrt{x^2 - 3\Pi^2})$.

Solution:
1. $\dfrac{\ln(1+h)}{1+h} = h - \frac{3}{2}h^2 + (11/6)h^3 + o(h^3)$.
2. $\dfrac{x}{\exp(x)-1} = 1 - x/2 + (1/12)x^2 + 0\times x^3 + o(x^3)$
3. $\exp(\dfrac{x}{\cos(x)}) = 1 + x + x^2/2 + (2/3)x^3 + o(x^3)$
4. $\ln(1+x+\sqrt{1+x}) = \ln(2) + (3/4)x + (-11/32)x^2 + (7/32)x^3 + o(x^3)$
5. $\ln(x^2+2x+3) - \ln(x^2+x+1) = \ln(1+2/x+3/x^2) - \ln(1+1/x+1/x^2) = ... = 1/x + 1/(2x^2) - 8/(3x^3) + o(1/x^3)$
6. $\ln(x\tan(1/x)) = 1/(3x^2) + o(1/x^3)$
7. $\sqrt{\tan(\Pi/4+h)} = 1 + h + h^2/2 + (5/6)h^3 + o(h^3)$
8. $\sqrt{1+\sqrt{1+h}} = \sqrt{2}(1 + h/8 - (5/128)h^2 + o(h^2))$
9. $\sin(\sqrt{(2\pi+h)^2 - 3\Pi^2}) = -2h + (3/2\pi)h^2 + o(h^2)$

$\heartsuit \star\star$ **Exercice 15**

1. Déterminer des réels a et b tels que $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x}{\ln(1+x)}+\dfrac{a}{x}+b\right)=0$ et donner pour ces valeurs de a et b un équivalent simple de cette expression quand $x\to 0$.
2. Déterminer des réels a et b tels que $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos(x)}{\ln(1+x)}+\dfrac{a}{x}+b=0$. Donner alors un équivalent simple de cette expression quand x tend vers 0.

Solution:

1. On trouve $a=-1$, $b=-\frac{3}{2}$ et dans ce cas : $f(x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{11}{12}x$.
2. On trouve $a=-1$, $b=-\dfrac{1}{2}$ et dans ce cas : $f(x)\underset{x\to 0}{\sim}\frac{-7}{12}x$.

$\star$ **Exercice 16** Déterminer des réels a et b tels que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=\sqrt{x}$ si $0\leq x\leq 1$ et $f(x)=ax^2+bx+1$ sinon soit dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Solution: on ajuste pour avoir continuité et dérivabilité en 1 et on trouve $a=1/2$ et $b=-1/2$

$\star$ **Exercice 17** Etudier les branches infinies de $\mathcal{C}_f$ où $f(x)=\dfrac{x^2}{x-1}\,e^{\frac{1}{x}}$.

Solution: Le domaine de définition de f est $D=]-\infty,0[\cup]0,1[\cup]1,+\infty[$.
Etude en $\pm\infty$: $\frac{1}{x}\to 0$ et $\exp(1/x)\to 1$ donc $\dfrac{x^2}{x-1}\,e^{\frac{1}{x}}\underset{x\to\pm\infty}{\sim}\dfrac{x^2}{x-1}\underset{x\to\pm\infty}{\sim}x$.

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)}{x} &\underset{x\to\pm\infty}{=} x\frac{x}{x-1}e^{1/x}\underset{x\to\pm\infty}{=}\frac{1}{1-1/x}e^{1/x}\\
&\underset{x\to\pm\infty}{=} x\left(1+(1/x)+(1/x)^2+\underset{x\to\pm\infty}{o}(1/x^2)\right)\left(1+(1/x)+(1/2)(1/x^2)+\underset{x\to\pm\infty}{o}(1/x^2)\right)\\
&\underset{x\to\pm\infty}{=} \ldots.=x+2+(5/2)x+\underset{x\to\pm\infty}{o}(1/x)
\end{aligned}$$

Donc la droite d'équation $y=x+2$ est asymptote à la courbe représentative de f ; la courbe est au-dessus de l'asymptote au voisinage de $+\infty$ et en-dessous au voisinage de $-\infty$.
Etude en 0^- : $1/x\to-\infty$ donc $\exp(1/x)\to 0$ et $\frac{x^2}{x-1}\to 0$ donc $\lim_{0^-}f=0$ et $\lim_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{0}=0$ donc $f'_g(0)=0$ (demi-tangente horizontale).
Etude en 0^+ : $1/x\to+\infty$ donc $\exp(1/x)\to+\infty$ et $f(x)\underset{x\to 0^+}{\sim}\frac{x^2}{-1}\exp(1/x)\underset{x\to 0^+}{\sim}\dfrac{e^{1/x}}{(1/x)^2}\underset{x\to 0^+}{\to}+\infty$ donc $\lim_{0^+}f=+\infty$ (asymptote verticale).
Etude en 1 : $f(x)\underset{x\to 1}{\sim}\frac{e}{x-1}\to\pm\infty$ selon que l'on tend par valeurs supérieures ou inférieures.

4 Etude d'une réciproque

Solution: EXO INTERESSANT MAIS J'EN AI ASSEZ SUR LE SUJET $\star\star$ **Exercice 18** **Dans cet exercice, on ne cherchera pas à déterminer la fonction** f^{-1}.

1. Montrer que f définie par $f(x)=\tan^3(x)$ est une bijection de $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$ dans J à déterminer.
2. Étudier la dérivabilité de f^{-1} sur J.
3. Déterminer $(f^{-1})'(1)$.

⋆⋆ **Exercice 19** Soit $\left\{f\ :\ [\pi/2,\pi[\longrightarrow \mathbb{R},\ x\longrightarrow \dfrac{1}{\sin(x)}\right\}$. Montrer que f a une réciproque notée g. Donner l'ensemble de définition et le domaine de dérivabilité de g. Calculer g'.

Solution: $f(x)=\frac{1}{\sin(x)} \Rightarrow f'(x)=-\dfrac{\cos(x)}{\sin^2(x)}>0$ sur $]\pi/2,\pi[$.
Donc f est continue et strictement croissante sur $[\pi/2,\pi[$. Elle réalise donc une bijection de $[\pi/2,\pi[$ vers $[f(\pi/2),\lim\limits_{\pi} f[=[1,+\infty[$.
Pour $y\in]1,+\infty[$, $f^{-1}(y)\in]\pi/2,\pi[$ et donc $f'(f^{-1}(y))\neq 0$ et l'on a alors : $(f^{-1})'(y)=\dfrac{1}{f'(f^{-1}(y))}=\dfrac{-\sin^2(f^{-1}(y))}{\cos(f^{-1}(y))}$.
Si on pose $x=f^{-1}(y)$, on a $f(x)=y=\dfrac{1}{\sin(x)}$ soit $\sin(x)=\sin(f^{-1}(y))=\dfrac{1}{y}$.
Par ailleurs $\cos^2(f^{-1}(y))=1-\sin^2(f^{-1}(y))$ et $\cos(f^{-1}(y))<0$ car $f^{-1}(y)\in]\pi/2,\pi[$.
Donc $\cos(f^{-1}(y))=-\sqrt{1-\frac{1}{y^2}}$.
Donc $(f^{-1})'(y)=\dfrac{-\dfrac{1}{y^2}}{-\sqrt{1-\frac{1}{y^2}}}=\dfrac{1}{y^2\sqrt{\frac{y^2-1}{y^2}}}=\dfrac{1}{y\sqrt{y^2-1}}$ car $y>0$.
Autre méthode : $y=f(x)=\dfrac{1}{\sin(x)}$ donc $\frac{1}{y}=\sin(x)=\sin(\pi-x)$ et $\pi-x\in]0,\pi/2]$. Donc $\pi-x=\arcsin(\dfrac{1}{y})$ c'est à dire : $x=\pi-\arcsin(\frac{1}{y})=f^{-1}(y)$. Et on sait dériver cette expression....

⋆⋆ **Exercice 20** On considère la fonction f définie sur $I=]0,+\infty[$ par $f(x)=x+\ln(x)$.
Démontrer que f réalise une bijection de I vers un intervalle J à déterminer. Montrer que sa réciproque, notée g, est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $\forall x\in\mathbb{R},\ g'(x)=\dfrac{g(x)}{1+g(x)}$.

Solution: $f'(x)=1+\frac{1}{x}>0$ pour $x\in]0,+\infty[$. La fonction f est donc continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$. Elle réalise donc une bijection de $I=]0,+\infty[$ vers $J=]\lim\limits_{0} f,\lim\limits_{+\infty} f[=]-\infty,+\infty[$.
Comme f' ne s'annule en aucun point de I, $g=f^{-1}$ est dérivable sur J et

$$g'(x)=\frac{1}{f'\circ g(x)}=\frac{1}{1+\frac{1}{g(x)}}=\frac{g(x)}{g(x)+1}$$

♡ ⋆⋆ **Exercice 21** On notera respectivement cosh, sinh et tanh les fonctions cosinus hyperbolique, sinus hyperbolique et tangente hyperbolique définies par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad \cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2},\quad \sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}\quad\text{et}\quad \tanh(x)=\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}=\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}.$$

1. Montrer, en étudiant ses variations, que tanh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à préciser. On note artanh “ argument tangente hyperbolique ” sa réciproque.
2. Exprimer la dérivée de tanh en fonction de tanh.
3. Démontrer que artanh est impaire.
4. Démontrer que artanh est dérivable sur I et calculer sa dérivée.
5. Exprimer artanh à l'aide de fonctions usuelles.
6. Déterminer un développement limité à l'ordre 5 de artanh en 0.
7. Montrer que la fonction cosh réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers un intervalle à déterminer. Déterminer explicitement sa réciproque, que l'on notera argch, ainsi que la dérivée de cette réciproque.
8. Montrer que la fonction sinh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers un intervalle à déterminer. On notera argsh cette réciproque. Déterminer la dérivée de argsh, sans calculer argsh.

Solution:

1. $\tanh'(x) = \dfrac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = \dfrac{1}{\cosh^2(x)} > 0$. La fonction tanh est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $J =]\lim\limits_{-\infty}, \lim\limits_{+\infty}[=]-1, 1[$ (car $\tanh(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{e^x}{e^x} \underset{x\to+\infty}{\sim} 1$ et idem en $-\infty$).
2. $\tanh'(x) = \dfrac{\cosh^2(x) - \sinh^2(x)}{\cosh^2(x)} = 1 - \tanh^2(x)$.
3. Soit $x \in \mathbb{R}$ et $y = \operatorname{artanh}(x)$. Alors $\tanh(y) = x$ et $\tanh(-y) = -x$ (on voit sans peine que tanh est impaire). Donc $-y = \operatorname{artanh}(-x)$ c'est à dire $\operatorname{artanh}(x) = -\operatorname{artanh}(-x)$.
4. La dérivée de tanh ne s'annule en aucun point donc artanh est dérivable sur $]-1, 1[$ et
   $$\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{\tanh(\operatorname{artanh}(x))} = \frac{1}{1 - \tanh^2(\operatorname{artanh}(x))} = \frac{1}{1 - x^2}$$
5. On en déduit par intégration que
   $$\operatorname{artanh}(x) - \operatorname{artanh}(0) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2} dt = \int_0^x \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t}\right) dt$$
   d'où $\operatorname{artanh}(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.
   On pouvait aussi résoudre directement $y = \tanh(x)$ en passant aux exponentielles.
6. $\operatorname{artanh}'(x) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{1+x} + \dfrac{1}{1-x}\right)$ et on connait les DL de $\dfrac{1}{1+x}$ et $\dfrac{1}{1-x}$. On obtient :
   $$\operatorname{artanh}'(x) = \frac{1}{2}\left(2 + 2x^2 + 2x^4 + o(x^5)\right) = 1 + x^2 + x^4 + o(x^5)$$
   En utilisant le théorème d'intégration des DL :
   $$\operatorname{artanh}(x) - \operatorname{artanh}(0) = x + x^3/3 + x^4/5 + o(x^5) \text{ et } \operatorname{artanh}(0) = 0$$
7. $\cosh' = \sinh > 0$ donc strictemebnt croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ et cosh est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. Donc cosh réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ vers $[\cosh(0), \lim\limits_{+\infty}\cosh[= [1, +\infty[$.
   Soit $y \in [1, +\infty[$. On cherche x tel que $\cosh(x) = y$.
   $$\cosh(x) = y \iff \frac{e^x + e^{-x}}{2} = y \iff e^{2x} - 2ye^x + 1 = 0$$
   On se retrouve avec une équation du second degré d'inconnue $X = e^x$. On a $\Delta = 4y^2 - 4 \geq 0$ car $y \geq 1$. Les solutions sont $X_1 = \dfrac{2y + 2\sqrt{y^2-1}}{2} = y + \sqrt{y^2-1}$ et $X_2 = y - \sqrt{y^2-1}$. Par ailleurs : $X = e^x \geq 1$ car $x \geq 0$. Or $X_1 \geq 1$ et $X_2 le 1$ (en effet : $X_2 le 1 \iff 0 \leq y - 1 \leq \sqrt{y^2-1} \iff (y-1)^2 \leq y^2 - 1 \iff -2y + 1 \leq 1 \iff y \leq 1$ ce qui est vrai). Et de plus $X_1 = X_2$ pour $y = 1$. Donc on obtient$x = \ln(X_1) = \ln(y + \sqrt{y^2-1})$ =Argch(y).
   En dérivant, on obtient Argch'$(y) = \dfrac{1}{\sqrt{y^2-1}}$.
8. De manière analogue : sinh réalise une bijection de $]-\infty, +\infty[$ vers $]\lim\limits_{\infty}\sinh, \lim\limits_{+\infty}\sinh[=]-\infty, +\infty[$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sinh'(x) = \cosh(x) \neq 0$ donc la réciproque de sinh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et
   $$\operatorname{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sinh'(\operatorname{Argsh}(x))} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{Argsh}(x))}.$$
   Or $\cosh^2 - \sinh^2 = 1 \Rightarrow \cosh^2 = 1 + \sinh^2 \Rightarrow \cosh = \sqrt{1 + \sinh^2}$ car $\cosh > 0$
   Donc $\operatorname{Argsh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2((\operatorname{Argsh}(x))}}$.

♡ ⋆⋆ **Exercice 22** Montrer que la fonction f définie par $f(x) = \arctan(x) + \cosh(x) - 1$ est bijective au voisinage de 0. Montrer que f^{-1} admet un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 et le calculer. (Pour le calcul, on pourra écrire a priori $f^{-1}(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + o(x^3)$, puis déterminer la valeur de a, et enfin calculer les autres coefficients en écrivant que $f^{-1} \circ f = Id$ au voisinage de 0).

Solution:
$f(x) = \arctan(x) + \cosh(x) - 1 \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + \sinh(x)$ et donc $f'(0) = 1 > 0$. Par ailleurs f' est continue donc f' est strictement positive sur un voisinage $I = [-\alpha, \alpha]$ de 0 (avec $\alpha > 0$). Donc f est continue et strictement croissante sur I, donc réalise une bijection de I vers $J = [f(-\alpha), f(\alpha)]$.
f' ne s'annule en aucun point de I donc f^{-1} est dérivable sur I et $(f^{-1})' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}$.
Les fonctions f' et f^{-1} étant dérivables, $(f^{-1})'$ est dérivable et $(f^{-1})''(x) = ... = \dfrac{-f'' \circ f^{-1}(x)}{(f' \circ f^{-1}(x))^3}$. Etc : on peut dériver indéfiniment f^{-1}.
On peut appliquer le th. de Taylor-Young : f^{-1} admet un DL en $f(0) = 0$. Ce DL s'écrit

$$f^{-1}(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + o(x^4)$$

On sait que $f^{-1}(0) = 0$ donc $a_0 = 0$; et $a_1 = (f^{-1})'(0) = \dfrac{1}{f'(0)} = 1$ donc

$$f^{-1}(x) = x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + o(x^4)$$

Par ailleurs $f(x) = ... = x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4!} + o(x^4)$. On compose les deux DL et on obtient :

$$f^{-1} \circ f(x) = f(x) + a_2 f(x)^2 + a_3 f(x)^3 + a_4 f(x)^4 + \underbrace{o(f(x)^4)}_{=o(x^4}$$

$$f^{-1} \circ f(x) = x + (\frac{1}{2} + a_2)x^2 + (-\frac{1}{3} + 2a_2 + \frac{1}{2} + a_3)x^3 + x^4(\frac{1}{4!} + 2 \times 1 \times (-1/3) + a_3 \times 3 \times \frac{1}{2} + a_4) + o(x^4)$$

Enfin $f^{-1} \circ f(x) = x$ donc par unicité du DL : $a_2 = -1/2,\ -1/3 + a_2 + a_3 = 0$ donc .... $a_3 = 5/6$ et enfin .... $a_4 = ...$

Exercices d'oral

Exercice 23

1. On pose $g(x) = \mathrm{e}^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
   Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.
2. On pose $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}}{1+x}$.
   En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.
3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

Solution:

1. g est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et h est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
   On prouve, par récurrence, que :
   $\forall\, x \in \mathbb{R},\ g^{(k)}(x) = 2^k \mathrm{e}^{2x}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ h^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}}$.
2. g et h sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ donc, d'après la formule de Leibniz, f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et $\forall\, x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$:
   $f^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} g^{(n-k)}(x) h^{(k)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^{n-k} \mathrm{e}^{2x} \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}} = n! \mathrm{e}^{2x} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k 2^{n-k}}{(n-k)!(1+x)^{k+1}}$.

3. Notons (P_n) la propriété :
   Si $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ sont n fois dérivables sur I alors, fg est n fois dérivable sur I et :
   $\forall\, x \in I,\ (fg)^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x).$

   Prouvons que (P_n) est vraie par récurrence sur n.

   La propriété est vraie pour $n = 0$ et pour $n = 1$ (dérivée d'un produit).
   Supposons la propriété vraie au rang $n \geqslant 0$.

   Soit $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions $n+1$ fois dérivables sur I.
   Les fonctions f et g sont, en particulier, n fois dérivables sur I et donc par hypothèse de récurrence la fonction fg l'est aussi avec $\forall\, x \in I,\ (fg)^{(n)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x) g^{(k)}(x).$
   Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, les fonctions $f^{(n-k)}$ et $g^{(k)}$ sont dérivables sur I donc par opération sur les fonctions dérivables, la fonction $(fg)^{(n)}$ est encore dérivable sur I.
   Ainsi la fonction fg est $(n+1)$ fois dérivable et :

   $$\forall\, x \in I,\ (fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + f^{(n-k)}(x) g^{(k+1)}(x) \right).$$

   En décomposant la somme en deux et en procédant à un décalage d'indice sur la deuxième somme, on obtient : $\forall\, x \in I,\ (fg)^{(n+1)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x).$
   C'est-à-dire

   $$(fg)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x) + \binom{n}{0} f^{(n+1)}(x) g^{(0)}(x) + \binom{n}{n} f^{(0)}(x) g^{(n+1)}(x).$$

   Or, en utilisant le triangle de Pascal, on a $\displaystyle\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}.$
   On remarque également que $\displaystyle\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}$ et $\displaystyle\binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1}.$
   On en déduit que $(fg)^{(n+1)}(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(n+1-k)}(x) g^{(k)}(x).$
   Donc (P_{n+1}) est vraie.

Exercice 24

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in \,]a,b[$.
   On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et que f est dérivable sur $]a, x_0[$ et sur $]x_0, b[$.
   Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \displaystyle\lim_{x \to x_0} f'(x).$
3. Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\Longrightarrow$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.
   Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.

Solution:

1. Théorème des accroissements finis :
   Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$.
   On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
   Alors $\exists\, c \in \,]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.
2. On pose $l = \displaystyle\lim_{x \to x_0} f'(x).$
   Soit $h \neq 0$ tel que $x_0 + h \in [a,b]$.
   En appliquant le théorème des accroissements finis, à la fonction f, entre x_0 et $x_0 + h$, on peut affirmer qu'il existe c_h strictement compris entre x_0 et $x_0 + h$ tel que $f(x_0 + h) - f(x_0) = f'(c_h)h$.

Quand $h \to 0$ (avec $h \neq 0$), on a, par encadrement, $c_h \to x_0$.
Donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h}\left(f(x_0+h) - f(x_0)\right) = \lim\limits_{h\to 0} f'(c_h) = \lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = l$.
On en déduit que f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = l$.

3. La fonction g proposée dans l'indication est évidemment dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
g est également dérivable en 0 car $\dfrac{1}{h}\left(g(h) - g(0)\right) = h\sin\left(\dfrac{1}{h}\right)$.
Or $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} h\sin\left(\dfrac{1}{h}\right) = 0$ car $|h\sin\left(\dfrac{1}{h}\right)| \leqslant |h|$.
Donc, g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.
Cependant, $\forall\, x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $g'(x) = 2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) - \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$.
$2x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ (car $|2x\sin(\dfrac{1}{x})| \leqslant 2|x|$), mais $x \longmapsto \cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0.
Donc g' n'a pas de limite en 0.