***Exercice 1** **Séries télescopiques :**

1. Décomposer $\dfrac{1}{n^2-1}$ en éléments simples. Puis montrer que la série $\sum \dfrac{1}{n^2-1}$ converge et calculer sa somme.
2. ♡ Déterminer la nature et la somme de la série $\sum \ln\left(1+\dfrac{2}{n(n+3)}\right)$.
3. Montrer que pour tout entier $p \geqslant 1$, la série $\sum \dfrac{1}{n(n+p)}$ converge. On note L_p sa somme.

   On admet que : $\left(\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\right) = \ln(n) + \gamma + \varepsilon_n$ où γ est une constante (d'Euler) et $\varepsilon_n \to 0$.

   Exprimer L_p en fonction de $H_p = \sum_{k=1}^{p} \dfrac{1}{k}$.
4. (a) Déterminer la nature de la série de terme général $\dfrac{n}{n^4+n^2+1}$.

   (b) Montrer qu'il existe $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n}{n^4+n^2+1} = \dfrac{a}{n^2-n+1} + \dfrac{b}{n^2+n+1}$.

   (c) En déduire la valeur de la somme : $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{n}{n^4+n^2+1}$.

Solution:

1. Exo Charlotte
2. Remarquer que $\ln\left(1+\dfrac{2}{n(n+3)}\right) = \ln\left(\dfrac{(n+1)(n+2)}{(n(n+3)}\right)$ et téléscoper.

   $1+\dfrac{2}{n(n+3)} = \dfrac{(n+1)(n+2)}{n(n+3)}$ et on a téléscopage de termes (soit produit téléscopique si on regroupe tout à l'intérieur de ln, soit somme téléscopique si on développe les ln) et on obtient à la fin : $S_n = \ln(\dfrac{(n+1)!(n+2)!3!}{2\ n!(n+3)!} = \ln(3) + \ln((n+1)/(n+3)) \to \ln(3)$.
3. Décomposer en élément simple. Puis on trouve $S_n = \dfrac{1}{p}\left(H_n - (H_{n+p} - H_p)\right)$ qui tend vers $L_p = \dfrac{H_p}{p}$. Il faut utiliser l'égalité $H_n = \ln(n) + \gamma + \epsilon_n$.
4. (a) En calculant un équivalent, on a la CV de la série.

   (b) $\dfrac{n}{n^4+n^2+1} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n^2-n+1} - \dfrac{1}{n^2+n+1}\right)$

   (c) On remarque que $(n+1)^2-(n+1)+1 = n^2+n+1$ donc par téléscopage, on obtient :

$$S_n = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n^2+3n+3}\right) \to \frac{1}{2}$$

****Exercice 2** Calculer la somme suivante, sans oublier de justifier son existence : $\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)$.

Solution: On écrit que $\dfrac{(n+1)^2)}{n(n+1)} = ... = 1 + \dfrac{1}{n(n+2)}$ donc $\ln\left(\dfrac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right) \sim \dfrac{1}{n^2}$ donc série CV. On calcule S_n et on regroupe tout sous le même logarithme : produit téléscopique et il ne reste que $S_n = \ln(\dfrac{2(n+1)}{n+2} \to \ln(2)$.

♡***Exercice 3** Dans chacun des cas suivants, étudier la nature de la série de terme général u_n.

a) $u_n = \dfrac{n^4\ln(3n)}{e^n}$. *b)* $u_n = \dfrac{1}{n^2+\sin(n^6)}$. *c)* $u_n = \dfrac{e^{-2n}+n}{n^3+1}$.. *d)* $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin(\dfrac{\pi}{2n})$

e) $u_n = \ln(\cos(1/2n))$ *f)* $\ln(1-\dfrac{1}{2n})$. *g)* $u_n = \ln\left(\dfrac{2+\sin(\frac{1}{n})}{2-\sin(\frac{1}{n})}\right)$ pour $n > 0$

Solution: exo ECS1
a) $n^2 \times u_n =\sim \dfrac{n^6 \ln(n)}{e^n} \sim \dfrac{n^7}{e^n} \times \dfrac{\ln(n)}{n} \to 0$ donc $u_n = o(\dfrac{1}{n^2}$.
b) pour $n > 1$ $0 < n^2 - 1 \leq n^2 + \sin(n^6) \leq n^2 + 1 \Rightarrow 0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{n^2-1}$ etc... donc CV.
c) $u_n \sim \dfrac{1}{n^2}$
d) $u_n \sim \dfrac{\pi}{2} \dfrac{1}{n^{3/2}}$
e) $u_n = \ln(\cos(1/2n))$: on fait un DL et on obtient après calcul $u_n \sim -\dfrac{1}{8n^2}$ donc la série converge.
f) $\ln(1 - \dfrac{1}{2n}) \sim -\dfrac{1}{2n}$ donc DV
g) $\sin(\dfrac{1}{n}) \to 0$ et on fait un DL en $\alpha_n = \sin(\dfrac{1}{n})$. On obtient $u_n = ... \sim \alpha_n \sim \dfrac{1}{n}$ de signe const et série DV

Exercice 4 Étudier la nature de la série de terme général u_n dans les cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$
2. $u_n = \cos(n\pi)$
3. $u_n = \dfrac{n^2 - \cos n}{e^n + 3}$
4. $u_n = 2n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$
5. $u_n = \dfrac{\sin n}{n^2}$
6. $u_n = \dfrac{e^{in}}{n^3}$
7. $u_n = \ln\left(\dfrac{n^2+2}{n^2}\right)$
8. $u_n = \sin\left(\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}\right) \dfrac{1}{\sqrt{n + \sqrt{n}}}$
9. $u_n = \dfrac{n \cos n}{2^n}$
10. $u_n = \sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \cos(n)$
11. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$

Solution:

1. DV car en $1/n$
2. Grosst DV
3. $n^2 \times u_n \to 0$ donc CV
4. Grosst DV
5. $n^{3/2} \times u_n \to 0$ donc CV
6. Absolument CV par Riemann
7. $u_n \sim \dfrac{n^2+2}{n^n} - 1 \sim \dfrac{2}{n^2}$ donc CV
8. $n \times u_n \sim \pi \to 1$ donc DV
9. $|n^2 \times u_n| \leq \dfrac{n^3}{2^n} \to 0$ donc $u_n = o(\dfrac{1}{n^2})$ donc CV
10. $|u_n| \leq \dfrac{1}{n^2}$ donc CV
11. Par Stirling : $u_n \sim \dfrac{\sqrt{2\pi n}}{e^n}$ donc $n^2 u_n \to 0$ et donc CV
   Autre approche : D'alembert : $u_{n+1} u_n = ... = \exp(n \ln(\dfrac{n}{n+1}))$ et ce qui est dans l'exponentielle est équivalent à -1 donc $u_{n+1}/u_n \to e^{-1} < 1$ donc CV

Exercice 5 Etudier la nature de la suite (u_n) définie par $u_n = \displaystyle\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{k^\alpha}\right)$. Préciser pour quelles valeurs u_n tend vers 0. Montrer que : si (u_n) converge vers une limite non nulle, alors sa limite est un réel strictement positif.

Solution: Pour $\alpha = 0$, $u_n = 0$ pour tout n.
Pour $\alpha < 0$, $u_n = (-1)^{n-1} \displaystyle\prod_{k=2}^{n} (k^{-\alpha} - 1)$ donc $|u_n| \to +\infty$ et $(u_n j)$ n'a pas de limite.
Pour $\alpha > 0$: $\ln(u_n) = S_n$ où S_n est la somme partielle de la série de terme général égal à
$v_n = \ln\left(1 - \dfrac{1}{k^\alpha}\right) \underset{k \to +\infty}{\sim} -\dfrac{1}{k^\alpha}$ donc CV pour $\alpha > 1$ donc u_n a une limite finie.

Pour $\alpha \leq 1$, $\sum v_n$ diverge vers $-\infty$ donc $u_n \to 0$.
RQ : pour $\alpha > 0$, on a $u_n > 0$ et $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ donc u_n converge vers $\min\{u_k, k \in \mathbb{N}\}$ et donc (u_n) converge.

**<u>Exercice 6</u> Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = e^{\frac{(-1)^n}{n}} - \left(1 + \dfrac{(-1)^n}{n^2}\right)^n$. Déterminer la nature de $\sum_{n\geq 1} u_n$.

Solution: On fait un DL à l'intérieur de l'exponentielle du 2e terme, et on arrive à $u_n = e^{\frac{(-1)^n}{n}} - \exp(\dfrac{(-1)^n}{n} - \dfrac{1}{2n^3} + o(\dfrac{1}{n^3}))$ et on met $e^{\frac{(-1)^n}{n}}$ en facteur d'où $u_n = e^{\frac{(-1)^n}{n}} \times \left(1 - \exp - \dfrac{1}{2n^3} + o(\dfrac{1}{n^3})\right)$. On en déduit $u_n \sim \dfrac{1}{2n^3}$ donc série convergente !

**<u>Exercice 7</u> 1. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 0} \dfrac{3^n}{1+4^{2n}}$.

2. On note R_n le reste d'ordre n pour tout $n \geq 0$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq R_n \leq \dfrac{1}{4\cdot 5^n}$.
3. Comment obtenir une valeur approchée de la somme à 10^{-3} près ?

Solution:

1. $u_n \sim (3/4^2)^n$ série géom. CV donc $\sum u_n$ CV.
2. $0 \leq R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \left(\frac{3}{4^2}\right)^k \leq \left(\frac{3}{4^2}\right)^{n+1} \times \frac{1}{1 - \frac{3}{4^2}} = \frac{3}{13} \times \left(\frac{3}{16}\right)^n$. Or $\dfrac{3}{13} \leq \dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{3}{16} \leq \dfrac{1}{5}$, ...

   On prend n_0 tel que $\dfrac{1}{4\times 5^{n_0}} \leq 10^{-3}$ c'est à dire $n_0 \geq \dfrac{\ln(250)}{\ln(5)} = \dfrac{3\ln(5)+\ln(2)}{\ln(5)}$.

   Or $\dfrac{\ln(2)}{\ln(5)} \leq 1$ donc $n_0 \geq 4$ suffit.

♡**<u>Exercice 8</u> Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

1. Déterminer la natures de la série de terme général $f(n)$.
2. Montrer la convergence de la série de terme général $u_n = \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)\,dt - f(n)$.

Solution:

1. On étudie la fonction f définie par $f(t) = \ln(t)/t$. On étudie ses variations. Elle est décroissante, continue, positive sur sur $[e, +\infty[$. Donc d'après le théorème de comparaison série-intégrale, la séride $\sum f(n)$ et l'intégrale impropre $\displaystyle\int_e^{+\infty} f(t)dt$ sont de même nature. Or une primitive de f est $\dfrac{\ln^2(t)}{2}$ qui tend vers $+\infty$ en l'infini. Donc la série et l'intégrale divergent.
2. Donc pour $n \geq 4$, on a donc $f(n) \leq \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)dt \leq f(n-1)$ d'où $0 \leq \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(t)dt - f(n) \leq f(n-1) - f(n)$.
   $f(n-1) - f(n) = ... = \dfrac{(n-1)(\ln(n-1) - \ln(n)) + \ln(n-1)}{n(n-1)} = \dfrac{\ln(1-\frac{1}{n})}{n} + \dfrac{\ln(n-1)}{n(n-1)}$. Le premier terme est en $1/n^2$ et pour le 2e terme : $n^{3/2} \times \dfrac{\ln(n-1)}{n(n-1)} \to 0$. Donc ce sont deux termes de séries convergentes....

♡**<u>Exercice 9</u> Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+k)^2}$.

Montrer que u_n est bien défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ et déterminer la nature de $\sum_{n\geq 0} u_n$.

Indication : comparer $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(n+k)^2}$ à une intégrale puis en déduire un minoration de u_n.

> **Solution:** Pour n fixé on pose $v_k = \dfrac{1}{(n+k)^2} \sim \dfrac{1}{(k)^2}$ donc la série de terme général v_k converge donc u_n est bien défini.
> On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{(n+k)^2} \geq \int_{n+1}^{n+N+1} \frac{dt}{t^2} = \frac{-1}{n+N+1} + \frac{1}{n+1}$ donc par passage à la limite en faisant tendre n vers l'infini on obtient $u_n \geq \dfrac{1}{n+1}$ donc $\sum u_n$ DV

♡****Exercice 10**** Justifier l'existence de $u_n = \displaystyle\sum_{p=n}^{+\infty} \frac{1}{p!}$. Quelle est la nature de $\sum u_n$?

> **Solution:** u_n est le reste partielle d'ordre n de la série des $\dfrac{1}{k!}$ qui est convergente par d'alembert. Donc u_n existe et même on peut dire que $u_n \to 0$.
> $0 \leq u_n \leq \dfrac{1}{p!} \times \dfrac{1}{1-\frac{1}{p}} = \dfrac{1}{(p-1)\times(p-1)!} \leq \dfrac{1}{(p-1)^2}$ donc CV.

♡***Exercice 11*** Justifier la convergence de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ puis calculer la somme (en utilisant $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$).

> **Solution:** La série converge absolument sans souci. On pose σ_n la somme partielle d'ordre n de $\sum \dfrac{1}{k^2}$ puis on écrit que $S_{2n} = \displaystyle\sum_{n=1}^{2n} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sigma_{2n} - \frac{2}{4}\sigma_n$ et on utilise que $\sigma_n \to \pi^2/6$. Donc... $s = \pi^2/12$

* **Exercice 12** Soit la série de terme général $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+1})$.

1. Exprimer $\sin(\theta + n\pi)$ en fonction de n et de $\sin\theta$.
2. Démontrer que $\sum u_n$ est une série alternée et étudier la convergence de cette série.

> **Solution:** Oral michael

Exercice 13 Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+(-1)^n}}$.

Déterminer la nature de la série de terme général u_n.

> **Solution:** micheal

Exercice 14 Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{\pi n^2}{n+1}\right)$ est alternée et qu'elle converge.

Indication : on montrera que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = (-1)^{n-1}\sin\left(\dfrac{\pi}{n+1}\right)$.

****Exercice 15**** Nature des séries dont le terme général est :

(a) $u_n = \dfrac{(-1)^{n+1} n}{4n-3}$ (b) $u_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}}dx$ (c) $u_n = \displaystyle\int_{n}^{(n+1)} \frac{\cos(\pi x)}{1+x}dx$

Solution: marie-jà exo 17

***Exercice 16** Soit $x \in]-1;1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Convergence et somme des séries $\sum x^n \cos(n\theta)$ et $\sum x^n \sin(n\theta)$.

♡****Exercice 17** Soit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 > 0 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = u_n + u_n^2 \end{cases}$

1. Montrer que la suite (u_n) est croissante et déterminer sa limite.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \dfrac{\ln(u_n)}{2^n}$. Montrer que la série de terme général $P_{n+1} - P_n$ est convergente. En déduire que la suite (P_n) converge vers un réel $\ell > 0$.

Solution:

1. $u_{n+1} - u_n = u_n^2 \geq 0$ donc (u_n) croissante.Si u_n a une limite finie ℓ alors $\ell = \ell + \ell^2$ donc $\ell = 0$ ce qui est impossible car $u_0 >$ et la suite est croissante. Donc elle tend vers l'infini.
2. $P_{n+1} - P_n = ... = \ln\left(\dfrac{u_n + u_n^2}{u_n^2}\right) \times \dfrac{1}{2^{n+1}} = \ln(1 + \dfrac{1}{u_n}) \times \dfrac{1}{2^{n+1}} =\sim \dfrac{1}{u_n \times 2^{n+1}} = o(\dfrac{1}{2^{n+1}})$ donc $\sum(P_{n+1} - P_n)$ converge.
   C'est équivalent d'apreès le cours à la convergence de la suite (P_n) (série téléscopique).

♡***Exercice 18** **On admettra** que $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$.

1. Montrer la convergence et calculer la somme de la série de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2(n-p)!}$.
2. Même question avec la série de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p^2(n-p)^2}$.

Solution:

1. Produit de cauchy de $\sum a_n$ où $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ en posant $a_0 = 0$ et $\sum b_n$ avec $b_n = \dfrac{1}{n!}$. Ces deux séries sont ACV et le produit vaut $\dfrac{e\pi^2}{6}$.
2. On prend la même série $\sum a_n$ et a le produit de cauchy de la série par elle-même donc le produit vaut $\dfrac{\pi^4}{36}$.

Solution: La série $\sum 2^{-n}$ est ACV donc la série de Cauchy de cette somme par elle-même converge absolument. On a ainsi

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n}\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} 2^{-k} \times 2^{n-k}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)2^{-n} = 4$$

♡* **Exercice 19** Soit $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ et $u_0 = 0$.

1. La série $\sum u_n$ est-elle absolument convergente ?
2. On considère le produit de cauchy de cette série par elle-même, c'est à dire la série de terme général

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k u_{n-k}.$$

Montrer $\sum v_n$ est divergente. (On pourra être amené à étudier la fonction f définie par $f(x) = x(n-x)$.)

Solution:

1. facile : $\sum |u_n| = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ (Riemann), mais $\sum u_n$ est une série convergente (même méthode que pour montrer que $\sum \dfrac{(-1)^n}{n}$ converge).
2. $v_n = (-1)^n \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(n-k)}$. On étudie la fonction f définie par $f(x) = x(n-x)$ sur l'intervalle $[1, n-1]$, on obtient : croissante entre 1 et $n/2$ puis décroissante, donc $f(x)$ dans $[(n-1), \dfrac{n^2}{4}]$ et donc $|v_n| \geq (n-1)\dfrac{2}{n}$ donc $v_n \not\to 0$ donc série DV grosst !
   Cet exercice est là pour insister sur le fait que cela n'a d'intérêt de faire un produit de cauchy que pour des séries ABSOLUMENT convergentes.

♡* <u>**Exercice 20**</u> **Démonstration de la formule de Stirling.**

1. Dans cette question, on veut prouver l'existence d'un réel $K > 0$, tel que $n! \sim K\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$.
   On note $a_n = \dfrac{e^n n!}{\sqrt{n} n^n}$ et $u_n = \ln(a_{n+1}) - \ln(a_n)$
   (a) Montrer que la série $\sum u_n$ converge.
   (b) Conclure.
2. Dans cette question, on va déterminer la valeur exacte de la constante K, à l'aide des intégrales
$$I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin(t))^n dt.$$
   (a) Calculer I_0 et I_1. A l'aide d'une IPP, déterminer une relation entre I_{n+2} et I_n.
   En déduire les expressions de I_{2p} et I_{2p+1} (on donnera les résultats avec des factorielles).
   (b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante et que $I_{n+1} \sim I_n$.
   (c) Montrer que la suite $(n+1)I_nI_{n+1}$ est constante. En déduire un équivalent de I_n.
   (d) Déterminer la valeur de la constante K.

Exercices d'oral

<u>**Exercice 21**</u>

1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) **Cas** $\alpha \leqslant 0$: En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.
   (b) **Cas** $\alpha > 0$: Étudier la nature de la série.
   Indication : on pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.
2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{(\ln(n^2+n))^2}$.

Solution:

1. (a) Cas $\alpha \leqslant 0$
   $\forall\, n \geqslant 3$, $\ln n \geqslant 1$ donc $(\ln n)^\alpha \leqslant 1$.
   On en déduit que : $\forall\, n \geqslant 3$, $u_n \geqslant \dfrac{1}{n}$.
   Or $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n}$ diverge.
   Donc , par critère de minoration pour les séries à termes positifs, on en déduit que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ diverge.

(b) Cas $\alpha > 0$

Soit $n \geqslant 3$.

La fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$ est continue par morceaux, décroissante et positive sur $[2,+\infty[$ donc

$\forall k \in [\![3\,;\,n]\!]$, $f(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant f(k-1)$

donc $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} f(k) \leqslant \sum_{k=3}^{n}\int_{k-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=3}^{n} f(k-1)$

C'est-à-dire, $\displaystyle\sum_{k=3}^{n} f(k) \leqslant \int_{2}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{n-1} f(k)$

f étant positive, on peut donc écrire dans $[0,+\infty]$ l'inégalité

$\displaystyle\sum_{k=3}^{+\infty} f(k) \leqslant \int_{2}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=2}^{+\infty} f(k)$

de sorte que la série et l'intégrale sont simultanément finies,

autrement dit, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} f(n)$ et $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ sont de même nature.

Puisque $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \underset{t=\ln x}{=} \int_{\ln 2}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$, on peut affirmer que : $\displaystyle\int_{2}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x < \infty \Longleftrightarrow \alpha > 1$.

On en déduit que : $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} f(n)$ converge $\Longleftrightarrow \alpha > 1$.

2. On pose, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, $u_n = \dfrac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

Au voisinage de $+\infty$, $\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}-\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \mathrm{e}-\mathrm{e}^{n\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)} = \mathrm{e}-\mathrm{e}^{1-\frac{1}{2n}+o\left(\frac{1}{n}\right)} = \dfrac{\mathrm{e}}{2n}+o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

On en déduit qu'au voisinage de $+\infty$, $\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}}{2n}$.

De plus, au voisinage de $+\infty$, $\ln\left(n^2+n\right) = 2\ln n + \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 2\ln n + \dfrac{1}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Donc $\ln\left(n^2+n\right) \underset{+\infty}{\sim} 2\ln n$.

Et comme $\mathrm{e}^{\frac{1}{n}} \underset{+\infty}{\sim} 1$, on en déduit que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\mathrm{e}}{8} \times \dfrac{1}{n\left(\ln n\right)^2}$.

Or, d'après 1.(b), $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\left(\ln n\right)^2}$ converge.

Donc, par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} u_n$ converge.

Exercice 22 Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et ℓ un réel positif strictement inférieur à 1.

1. Démontrer que si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, alors la série $\sum u_n$ converge. **Indication** : écrire, judicieusement, la définition de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell$, puis majorer, pour n assez grand, u_n par le terme général d'une suite géométrique.
2. Quelle est la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n}$?

Solution:

1. Par hypothèse : $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\,N \in \mathbb{N} / \forall n \geqslant N$, $|\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - l| \leqslant \varepsilon$. (1)

Prenons $\varepsilon = \dfrac{1-l}{2}$.

Fixons un entier N vérifiant (1).

Alors $\forall\,n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant N \Longrightarrow |\dfrac{u_{n+1}}{u_n} - l| \leqslant \dfrac{1-l}{2}$.

Et donc, $\forall n \geqslant N$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \dfrac{1+l}{2}$.

On pose $q = \dfrac{1+l}{2}$. On a donc $q \in]0,1[$.
On a alors $\forall n \geqslant N,\ u_{n+1} \leqslant q u_n$.
On en déduit, par récurrence, que $\forall n \geqslant N,\ u_n \leqslant q^{n-N} u_N$.
Or $\displaystyle\sum_{n\geqslant N} q^{n-N} u_N = u_N q^{-N} \sum_{n\geqslant N} q^n$ et $\displaystyle\sum_{n\geqslant N} q^n$ converge car $q \in]0,1[$.
Donc, par critère de majoration des séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.

2. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

   $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n^n}{(n+1)^n} = \mathrm{e}^{-n\ln(1+\frac{1}{n})}$.
   Or $-n\ln(1+\dfrac{1}{n}) \underset{+\infty}{\sim} -1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \mathrm{e}^{-1} < 1$.
   Donc $\sum u_n$ converge.

Exercice 23

1. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres réels positifs.
   On suppose que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont non nulles à partir d'un certain rang.
   Montrer que : $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \implies \sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature..
2. Etudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{((-1)^n + \mathrm{i})\ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)}$.
   Remarque : i désigne le nombre complexe de carré égal à -1.

Solution:

1. Par hypothèse, $\exists\, N_0 \in \mathbb{N}/\ \forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N_0 \Longrightarrow v_n \neq 0$.
   Ainsi la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est définie à partir du rang N_0.
   De plus, on suppose que $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
   On en déduit que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = 1$.
   Alors, $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geqslant N_0$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \left|\dfrac{u_n}{v_n} - 1\right| \leqslant \varepsilon$. (1)
   Prenons $\varepsilon = \dfrac{1}{2}$. Fixons un entier N vérifiant (1).
   Ainsi, $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \left|\dfrac{u_n}{v_n} - 1\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   C'est-à-dire, $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow -\dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{u_n}{v_n} - 1 \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   On en déduit que $\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow \dfrac{1}{2} \leqslant \dfrac{u_n}{v_n} \leqslant \dfrac{3}{2}$. (*)

   Premier cas : Si $\sum v_n$ converge
   D'après (*), $\forall\, n \geqslant N,\ u_n \leqslant \dfrac{3}{2} v_n$.
   Donc, par critère de majoration des séries à termes positifs, $\sum u_n$ converge.
   Deuxième cas : Si $\sum v_n$ diverge
   D'après (*), $\forall\, n \geqslant N,\ \dfrac{1}{2} v_n \leqslant u_n$.
   Donc, par critère de minoration des séries à termes positifs, $\sum u_n$ diverge.
   Par symétrie de la relation d'équivalence, on obtient le résultat.

2. On pose $\forall\, n \geqslant 2,\ u_n = \dfrac{((-1)^n + \mathrm{i})\ln n \sin\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(\sqrt{n+3}-1\right)}$.

$|u_n| = \dfrac{\sqrt{2}\ln n \sin(\frac{1}{n})}{(\sqrt{n+3}-1)}$.

De plus $|u_n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\sqrt{2}\ln n}{n^{\frac{3}{2}}} = v_n$

On a $n^{\frac{5}{4}} v_n = \dfrac{\sqrt{2}\ln n}{n^{\frac{1}{4}}}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{5}{4}} v_n = 0$. On en déduit que $\sum v_n$ converge.

D'après 1., $\sum\limits_{n\geqslant 2} |u_n|$ converge.

Donc $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ converge absolument.

De plus, la suite $(u_n)_{n\geqslant 2}$ est à valeurs dans $\mathbb{C}$, donc $\sum\limits_{n\geqslant 2} u_n$ converge.

Exercice 24 On considère la série : $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. Prouver que, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \alpha\dfrac{\pi}{n} + O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.
3. $\sum\limits_{n\geqslant 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge-t-elle absolument ?

Solution:

1. $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}$.

   Or, au voisinage de $+\infty$, $\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}} = 1 + \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}) - \dfrac{1}{8n^2} + O(\dfrac{1}{n^3}) = 1 + \dfrac{1}{2n} + \dfrac{3}{8n^2} + O(\dfrac{1}{n^3})$.

   Donc, au voisinage de $+\infty$, $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{3}{8}\dfrac{\pi}{n} + O(\dfrac{1}{n^2})$.
2. On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

   D'après 1., $v_n = \cos\left(n\pi + \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{3}{8}\dfrac{\pi}{n} + O(\dfrac{1}{n^2})\right) = (-1)^{n+1}\sin\left(\dfrac{3}{8}\dfrac{\pi}{n} + O(\dfrac{1}{n^2})\right)$.

   Donc $v_n = \dfrac{3\pi}{8}\dfrac{(-1)^{n+1}}{n} + O(\dfrac{1}{n^2})$.

   Or $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$ converge (d'après le critère spécial des séries alternées)

   et $\sum\limits_{n\geqslant 1} O(\dfrac{1}{n^2})$ converge (par critère de domination), donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ converge.
3. D'après le développement asymptotique du 2., on a $|v_n| \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{3\pi}{8n}$.

   Or $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge (série harmonique), donc $\sum\limits_{n\geqslant 1} |v_n|$ diverge, c'est-à-dire $\sum\limits_{n\geqslant 1} v_n$ ne converge pas absolument.