

**NB : Tous les énoncés/définitions sont à connaître précisément. De plus, les démonstrations/exemples du paragraphe "Questions de cours" sont à savoir faire avec aisance.**

**Attention : les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement, à part quand cela est précisé par la mention « démonstration non exigible » ou « résultat admis ».**

## Déroulement

La colle comporte cette semaine **cette semaine pour tout le monde** : une question de cours suivie de un ou deux exercices sur les chapitres au programme.

Une question de cours (cf ci-dessus) peut être complétée par des formules ou théorèmes à énoncer précisément.

### I : Espaces vectoriels, applications linéaires matrices

Tout le programme de PCSI est à réviser...

### II : Compléments d'algèbre linéaire

#### 1) Interpolation de Lagrange

Base de  $\mathbb{K}_n[X]$  constituée des polynômes interpolateurs de Lagrange en  $n + 1$  points distincts de  $\mathbb{K}$ . Expression d'un polynôme  $P \in \mathbb{K}_n[X]$  dans cette base.

La somme des polynômes interpolateurs de Lagrange en  $n + 1$  points est le polynôme constant égal à 1.

#### 2) Produit d'espaces vectoriels, somme de sous-espaces vectoriels

Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels ; dimension dans le cas où ces espaces sont de dimension finie.

Somme, somme directe d'une famille finie de sous-espaces vectoriels.

En dimension finie, base adaptée à un sous-espace vectoriel, à une décomposition  $E = \bigoplus E_i$ .

Décomposition en somme directe obtenue par partition d'une base.

Si  $F_1, \dots, F_p$  sont des sous-espaces de dimension finie,  $\dim\left(\sum_{i=1}^p F_i\right) \leq \sum_{i=1}^p \dim(F_i)$ , avec égalité si et seulement si la somme est directe.

#### 3) Matrices par blocs et sous-espaces stables

Matrices définies par blocs, opérations par blocs de tailles compatibles (combinaison linéaire, produit).

Sous-espace vectoriel stable par un endomorphisme, endomorphisme induit.

Traduction matricielle de la stabilité d'un sous-espace vectoriel par un endomorphisme et interprétation en termes d'endomorphismes d'une matrice triangulaire ou diagonale par blocs.

Si  $u$  et  $v$  commutent alors le noyau de  $u$  est stable par  $v$ .

#### 4) Trace

Trace d'une matrice carrée. Linéarité, trace d'une transposée.

Relation  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ . Invariance de la trace par similitude. Notation  $\text{Tr}(A)$ .

### Questions de cours : démonstration ou exemples à savoir traiter.

- Dimension d'un produit cartésien de 2 espaces vectoriels de dimension finie.
- Somme directe de  $n$  sous-espaces vectoriels : caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul.
- Dimension d'une somme de 2 sous-espaces vectoriels.
- Base adaptée à la décomposition d'un espace  $E$  en somme directe de sous-espaces vectoriels.
- Polynômes de Lagrange : Base de  $\mathbb{K}_n[X]$  constituée des polynômes interpolateurs de Lagrange en  $n + 1$  points distincts de  $\mathbb{K}$ .
- Expression d'un polynôme  $P \in \mathbb{K}_n[X]$  dans cette base.
- Sous espaces stables et matrices diagonales par blocs (démonstration dans le cas de deux sous-espaces vectoriels)
- Trace :  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$ .