Lycée Aristide Briand, PC, 2025/2026 **Programme de la semaine n°5, Du 13/10 au 17/10 2025**

NB : Tous les énoncés/définitions sont à connaître précisément. De plus, les démonstrations/exemples du paragraphe "Questions de cours" sont à savoir faire avec aisance. Attention : les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement, à part quand cela est précisé par la mention « démonstration non exigible » ou « résultat admis ».

1. **Probabilités sur un univers fini** : tout exercice sur le programme de PCSI.
2. **Ensembles dénombrables, familles sommables** *Ce préambule propose une introduction a minima de la dénombrabilité et des familles sommables, afin de poser les bases de vocabulaire, méthodes et résultats qui seront admis, et directement utilisés. Ces notions ne feront l'objet d'aucune évaluation spécifique, et leur usage est strictement réservé au contexte probabiliste.*
   - Un ensemble est dit (au plus) dénombrable s'il est en bijection avec (une partie de) $\mathbb{N}$, c'est-à-dire s'il peut être décrit en extension sous la forme $\{x_i, i \in I\}$ où $I = \mathbb{N}$ ($I \subset \mathbb{N}$) avec des x_i distincts.
     Sont dénombrables : $\mathbb{Z}$, un produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables, une union au plus dénombrable d'ensembles dénombrables. Une partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.
   - En vue de généraliser les sommes finies et les sommes de séries de réels positifs, on admet sans soulever de difficulté qu'on sait associer à toute famille au plus dénombrable $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0,+\infty]$ sa somme $\sum_{i\in I} x_i \in [0,+\infty]$, et que pour tout découpage en paquets $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ de I, $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{i\in I_n} x_i\Big)$.
     La famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0,+\infty]$ est dite sommable si $\sum_{i\in I} x_i < \infty$. En pratique, dans le cas positif, les étudiants peuvent découper, calculer et majorer leurs sommes directement, la finitude de la somme valant preuve de sommabilité.
   - Une famille $(x_i)_{i\in I}$ au plus dénombrable de nombres complexes est dite sommable si $(|x_i|)_{i\in I}$ l'est. Pour $I = \mathbb{N}$, la sommabilité d'une suite équivaut à la convergence absolue de la série associée. Si $|x_i| \leqslant y_i$ pour tout $i \in I$, la sommabilité de $(y_i)_{i\in I}$ implique celle de $(x_i)_{i\in I}$.
3. **Probabilités discrètes**

   (a) Univers, événements. Univers Ω, tribu $\mathscr{A}$. Espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$. On se limite à la définition et à la stabilité par les opérations ensemblistes finies ou dénombrables.

   Traduction de la réalisation des événements $\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ et $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n$ à l'aide des quantificateurs $\exists$ et $\forall$.

   Événements. Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année.

   (b) Probabilité Probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$, σ-additivité. Espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Notation $P(A)$.
   Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Événement presque sûr, événement négligeable. Système quasi-complet d'événements.

   Croissance de la probabilité : $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.

   Théorème de continuité croissante, continuité décroissante.

   Corollaire : pour une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements (non nécessairement monotone), limites quand n tend vers l'infini de $P\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big)$ et $P\Big(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\Big)$.

   Sous-additivité : $P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$. En cas de divergence de la série à termes positifs $\sum P(A_n)$, on rappelle que $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = +\infty$.

   (c) Probabilités conditionnelles

   Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par la relation $P(A|B) = P_B(A) = \dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$.

   L'application P_B définit une probabilité. Formule des probabilités composées. Formule de Bayes.

   Formule des probabilités totales : Si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est un système complet ou quasi-complet d'événements, alors :
   $P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B\cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B|A_n)P(A_n)$. *On rappelle la convention* : $P(B|A_n)P(A_n) = 0$ lorsque $P(A_n) = 0$.

   (d) Événements indépendants Indépendance de deux événements.
   Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B équivaut à : $P(A|B) = P(A)$.
   Indépendance d'une famille finie d'événements. L'indépendance deux à deux n'entraîne pas l'indépendance.
   Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi. Extension au cas de n événements.

Questions de cours : démonstration ou exemples à savoir traiter.

- Les définitions du chapitre de probabilités discrètes DOIVENT être connues.
- Théorème de continuité croissante (grandes lignes de la preuve).
- Etre capable de dire ce que l'on admet du modèle décrivant l'expérience "on tire indéfiniment à Pile ou Face".
- Sous additivité : $P\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.
- Formule des probabilités totales et formule de Bayes.