

On considère pour commencer des fonctions à valeurs **réelles**.

Définition 1 Soit $[a, b]$ un **segment** et $a = a_0 < a_1 < \dots < a_{n-1} < a_n = b$ un nombre fini de réels. On dit que $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n)$ est une subdivision du segment $[a, b]$.

Définition 2 Soit $[a, b]$ un segment ($a < b$). On dit qu'une fonction $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est en escalier s'il existe une subdivision $(a_0, \dots, a_n)$ de $[a, b]$ et des réels $b_0, \dots, b_{n-1}$ tels que : $\forall i \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \forall x \in]a_i, a_{i+1}[, f(x) = b_i$.

On notera $\text{Esc}([a, b], \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a, b]$.

Remarque 1 $\text{Esc}([a, b], \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel

Theorème-Definition 1 Soit $f \in \text{Esc}([a, b], \mathbb{R})$ (où $a < b$), soit $s = (a_i)_{i=0 \dots n}$ adaptée à f . On a donc :

$$\exists (\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } \forall n \in \{0, \dots, n-1\}, \forall x \in]a_i, a_{i+1}[, f(x) = \alpha_i.$$

Alors le réel $I = \sum_{i=0}^{n-1} (a_{i+1} - a_i) \cdot \alpha_i$ ne dépend pas de la subdivision choisie. On l'appelle *intégrale de la fonction f*

sur $[a, b]$ et il est noté : $\int_I f$ ou $\int_{[a,b]} f$ ou encore $\int_a^b f$ ou $\int_a^b f(x)dx$.

Theorème-Definition 2 Soit $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, où $a < b$. On considère :

$E_1 = \{\varphi \in \text{Esc}([a, b], \mathbb{R}) \text{ telles que } \varphi \leq f\}$ et $E_2 = \{\psi \in \text{Esc}([a, b], \mathbb{R}) \text{ telles que } f \leq \psi\}$

L'ensemble $I_1 = \left\{ \int_a^b \varphi, \text{ où } \varphi \in E_1 \right\}$ est non vide et majoré. Il admet donc une borne supérieure notée $I^-(f)$.

L'ensemble $I_2 = \left\{ \int_a^b \psi, \text{ où } \psi \in E_2 \right\}$ est non vide et minoré. Il admet donc une borne inférieure notée $I^+(f)$.

De plus $I^-(f) = I^+(f)$ c'est à dire $\sup \left\{ \int_a^b \varphi, \text{ où } \varphi \in E_1 \right\} = \inf \left\{ \int_a^b \psi, \text{ où } \psi \in E_2 \right\}$.

le réel $I^-(f) = I^+(f)$ est noté :

$$\int_a^b f \text{ ou } \int_a^b f(x)dx \text{ ou encore } \int_{[a,b]} f$$

Notation : l'intégrale d'une fonction f continue sur un segment $[a, b]$ peut être notée indifféremment :

$$\int_a^b f(t) dt \quad \text{ou} \quad \int_{[a,b]} f \quad \text{ou} \quad \int_a^b f$$

On définit ensuite $\int_a^b f(t)dt$ pour $a \geq b$ en posant :

Proposition 1 1. Linéarité

Soient f et g deux fonctions continues sur I , soit $(a, b) \in I^2$, et soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. Alors :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt$$

2. Positivité. On suppose $a \leq b$.

Soit f une fonction continue et **positive** sur $[a, b]$. Alors : $\int_a^b f(t) dt \geq 0$

3. Croissance. On suppose $a \leq b$. Soient f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$ et telles que :

$\forall x \in [a, b], f(x) \leq g(x)$. Alors : $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$

Remarque 2 Pour l'item 3 de la proposition précédente : Réciproque fausse !

Proposition 2 Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ (avec $a \leq b$). Alors : $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$

Proposition 3 Relation de Chasles

Soient f une fonction continue sur $[a, b]$ et $c \in [a, b]$. Alors : $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$

Théorème 1 Stricte positivité

- i) Soit f continue et **positive** sur $[a, b]$ telle que $\int_a^b f(t) dt = 0$. Alors : $\forall x \in [a, b], f(x) = 0$.
- ii) Soit f continue, **positive** sur $[a, b]$ et **différente de la fonction nulle** sur $[a, b]$. Alors : $\int_a^b f(t) dt > 0$.

Remarque 3 ii) est la contraposée de i).

Définition 3 Soient f une fonction continue sur I et soit $(a, b) \in I^2$. Si $a > b$ on pose $\int_a^b f(t) dt = - \int_b^a f(t) dt$.

Proposition 4 Relation de Chasles

Soient f une fonction continue sur I et soit $(a, b, c) \in I^3$. Alors : $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$

Proposition 5 Sommes de Riemann. Si $f \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) = \int_a^b f(t) dt$.

Remarque 4 1. Très souvent $a = 0$ et $b = 1$, ce qui donne : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \int_0^1 f(t) dt$.

2. Le résultat reste valable même si l'indice k varie entre 1 et n ou entre 1 et $n-1$.

Théorème 2 Théorème fondamental de l'intégration

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle réel I et soit $a \in I$. Alors la fonction

$$F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a . Ainsi F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et $F' = f$.

Remarque 5 Ce théorème est parfois appelé **théorème fondamental de l'analyse**.

Corollaire 1 1. Toute fonction f continue sur un segment $[a, b]$ admet des primitives sur $[a, b]$.

2. Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et F une **primitive** de f sur $[a, b]$. Alors : $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$.

Remarque 6 Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a)$.

Remarque 7 Soit f une fonction continue sur I . Soient u et v deux fonctions dérivables sur J et à valeurs dans I . Alors la fonction G définie par $G(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t) dt$ est dérivable et sa dérivée vaut :

Quel est le domaine de définition de la fonction G définie par : $G(x) = \int_{x^2}^{x^4} \frac{e^t}{t} dt$? Justifier sa dérivabilité et calculer $G'(x)$.

Même question pour la fonction H définie par $H(x) = \int_x^{x^2} \frac{e^{-t^2}}{t} dt$.

Primitives usuelles

$f(x)$	$F(x)$
x^n	
$\frac{1}{x^n}$	
x^α	
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	
$\exp(x)$	
a^x	
$\frac{1}{1-x^2}$	

$f(x)$	$F(x)$
$\frac{1}{1+x^2}$	
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	
$\sin(x)$	
$\cos(x)$	
$\frac{1}{\cos^2(x)}$	
$1 + (\tan(x))^2$	
$1 + (\cotan(x))^2$	
$\frac{1}{\sin^2(x)}$	
$\operatorname{ch}(x)$	
$\operatorname{sh}(x)$	

Si on a une expression de la forme $g(x) = u'(x) \cdot f(u(x))$ (avec $F' = f$), une primitive de g est

Donner par exemple des primitives des fonctions f définies par :

$$f(x) = 2x \sin(x^2), f(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}, f(x) = \sin(x) \cdot \exp(\cos(x)) \dots$$

On doit aussi savoir qu'une primitive de $\frac{u'(x)}{u(x)}$ est

Attention : cela suppose que la fonction u ne s'annule pas sur I , donc que u est de signe constant (car continue)

Trouver par exemple des primitives des fonctions définies par les expressions suivantes :

$$f_1(x) = \frac{x}{x^2+1}, f_2(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}$$

$$\text{Peut-on faire de même pour } f_3(x) = \frac{2x-3}{x^2-3x+2} ?$$

Trouver des primitives de : $\tan$, $\cotan$ en précisant bien les intervalles sur lesquels on travaille.

Théorème 3 Intégration par parties

Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Alors : $\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt$.

Remarque 8 Cela s'applique

- aux intégrales de la forme $\int_a^b e^t P(t) dt$ où p est une fonction polynomiale
- au calcul de $\int_a^b \ln(t) dt$ ou de $\int_a^b \arctan(t) dt$

Théorème 4 Soient I et J deux intervalles. Soit $f \in \mathcal{C}^0(J, \mathbb{K})$ et soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur I telle que $\varphi(I) \subset J$. Alors $f \circ \varphi$ est bien définie et continue sur I . De plus :

$$\forall (a, b) \in I^2, \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = \int_a^b f \circ \varphi(t) \cdot \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u) du.$$

Remarque 9 Calcul à savoir faire absolument : Trouver une primitive de $\frac{1}{x^2 + x + 1}$ ou de $\frac{1}{x^2 + a^2}$ ou de $\frac{1}{x^2 + 2x + 9}$ ou de $\frac{x^2}{x^2 + 2x + 9}$

Attention : vous avez vu cette formule en PTSI. Elle sera au programme de la PT*. Vous devez la connaître en en connaître la démonstration. Si vous souhaitez qu'elle soit revue en cours, il faut le dire....

Théorème 5 Formule de Taylor avec reste intégral Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}(I)$ et soit $a \in I$. Alors :

$$\text{Pour tout } x \in I, f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) dt.$$

Généralisation pour des fonctions à valeurs **complexes** : on définit l'intégrale d'une fonction continue à l'aide des parties réelles et imaginaires. Les propriétés suivantes sont notamment conservées : linéarité, majoration en module, intégration par parties, changement de variable, formule de Taylor avec reste intégral.