

INTEGRATION sur un INTERVALLE QUELCONQUE

I Fonctions continues par morceaux

I.1 Fonction continue par morceaux sur un segment

Définition 1 Une fonction $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ est continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ de $[a; b]$ telle que :

$\forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, la restriction de f à $]a_i; a_{i+1}[$ admet un prolongement continu sur $[a_i; a_{i+1}]$.

Une telle subdivision est dite adaptée à f .

Notation : $CM([a; b], \mathbb{K}) = \{f : [a; b] \rightarrow \mathbb{K} \text{ continue par morceaux}\}$

Exemple 1 La restriction de la fonction partie entière à un segment $[a; b]$.

Exemple 2 $\forall x \in [-1, 1], f(x) = \frac{1}{x + \lfloor 1-x \rfloor}$ et $\forall x \in]0, 1], g(x) = \sin(\frac{1}{x})$ et $g(0) = 0$

f et g sont-elles continues par morceaux ?

Proposition 1 (dem) • Toute fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.

• $CM([a; b], \mathbb{K})$ est un espace vectoriel, stable par produit.

I.2 Intégrale sur un segment

Définition 2 Soit $f \in CM([a; b], \mathbb{K})$, on note $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ une subdivision de $[a; b]$ adaptée à f .

$\forall i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, on note $\tilde{f}_i$ le prolongement continu de f sur $[a_i; a_{i+1}]$. Alors :

La somme $S_\sigma(f) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{[a_i; a_{i+1}]} \tilde{f}_i$ ne dépend pas du choix de la subdivision .

Cette somme est appelée intégrale de f et est notée $\int_{[a; b]} f$.

I.3 Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

• Linéarité $f \rightarrow \int_{[a; b]} f$ est une forme linéaire de $CM([a; b], \mathbb{K})$.

• Inégalité triangulaire

Si $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ est continue par morceaux, alors $|f|$ aussi. et on a : $\left| \int_{[a; b]} f \right| \leq \int_{[a; b]} |f|$

• Positivité et croissance Dans ce paragraphe, f et g sont continues par morceaux sur $[a; b]$ et sont à valeurs réelles.

★ Si $f \geq 0$ alors $\int_{[a; b]} f \geq 0$.

★ Si $f \leq g$ alors $\int_{[a; b]} f \leq \int_{[a; b]} g$

• Relation de Chasles Si $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ est continue par morceaux, et si $c \in]a; b[$ alors : $\int_{[a; b]} f = \int_{[a; c]} f + \int_{[c; b]} f$

• Changement de variable Si $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ est continue par morceaux, et si

$\phi : [\alpha; \beta] \rightarrow [a; b]$ est une bijection de classe C^1 strictement croissante alors : $\int_{[a; b]} f(t)dt = \int_{[\alpha; \beta]} f(\phi(u))\phi'(u)du$.

• Attention, si $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ est positive, continue par morceaux et telle que $\int_{[a; b]} f = 0$ alors cela n'entraîne pas que $f = 0$. f peut être non nulle aux points de discontinuité.

I.4 Fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque

Définition 3 Soit I un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$.

$f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est continue par morceaux sur I , si la restriction de f à tout segment inclus dans I est continue par morceaux.

Notation : On note $CM(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Exemple 3 1. On considère la fonction f définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) = \lfloor x \rfloor$.

f est-elle continue par morceaux sur $\mathbb{R}^+$?

2. On considère la fonction g définie par : $\forall x \in]0, 2], g(x) = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$.

g est-elle continue par morceaux sur $]0, 2]$?

Remarque 1 Une fonction continue par morceaux sur un intervalle qui n'est pas un segment peut admettre une infinité de discontinuité et peut ne pas être bornée.

Proposition 2 $CM(I, \mathbb{K})$ est un espace vectoriel stable par produit.

II Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$.

II.1 Généralités

Définition 4 Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $f \in CM([a, +\infty[, \mathbb{K})$.

Pour $x \in [a, +\infty[$, on pose $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

Si F a une limite finie en $+\infty$, on dit que l'**intégrale** $\int_a^{+\infty} f$ **converge** ou **est convergente**.

Sinon, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est dite **divergente**.

Dans les deux cas, on dit que $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est **impropre en** $+\infty$.

En cas de convergence : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t)dt$ est notée $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ ou $\int_a^{+\infty} f$.

Exemple 4 $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$, $\int_{\pi}^{+\infty} \left(2i - \frac{1}{t^2}\right) e^{it^2} dt$, $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt{t}}$, $\int_0^{+\infty} \cos(t)dt$.

Remarque 2 Si $f : [a; +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$ est continue par morceaux et si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l \neq 0$, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ diverge.

Remarque 3 Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $f \in CM([a, +\infty[, \mathbb{K})$ et enfin soit $c \geq a$.

Alors : $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge $\iff \int_c^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Autrement dit, la nature de $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ ne dépend que du comportement de f au voisinage de $+\infty$.

En cas de convergence : $\int_a^{+\infty} f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^{+\infty} f(t)dt$.

Exemple 5 Le fait que $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge nous assure que, pour tout réel $c \in [1, +\infty[$, l'intégrale $\int_c^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge aussi.

Ainsi $\int_2^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ converge, etc...

Remarque 4 • Si $\int_a^{+\infty} f$ converge, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} f =$

• Si $\int_a^{+\infty} f$ converge et si f est continue sur $[a, +\infty[$,

alors $\left(x \rightarrow \int_x^{+\infty} f(t)dt\right)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$; et $\left(x \rightarrow \int_x^{+\infty} f(t)dt\right)' = -f(x)$

Proposition 3 (Linéarité)

$E = \left\{ f \in CM([a, +\infty[, \mathbb{K}) \text{ telles que } \int_a^{+\infty} f \text{ converge} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $CM([a, +\infty[, \mathbb{K})$;
et l'application $f \rightarrow \int_a^{+\infty} f$ est une forme linéaire sur E .

Proposition 4 (Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) Soit $f : [a; +\infty[\rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux.

L'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si $\int_a^{+\infty} \operatorname{Re}(f)$ et $\int_a^{+\infty} \operatorname{Im}(f)$ convergent.

Dans ce cas, on a : $\int_a^{+\infty} f = \int_a^{+\infty} \operatorname{Re}(f) + i \int_a^{+\infty} \operatorname{Im}(f)$

Exemple 6 Convergence et valeur de $\int_0^{+\infty} e^{-t} \sin(t) dt$

Théorème 1 RAPPEL : Soit F une fonction croissante sur un intervalle $[a, +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}$.

Alors F a une limite en $+\infty$.

Si F est majorée, alors F a une limite finie en $+\infty$, qui vaut $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \sup_{x \in [a, +\infty[} (F)$.

Si F n'est pas majorée, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$.

Finalement : $(F \text{ a une limite finie en } +\infty \iff F \text{ est majorée})$ et dans ce cas : $\lim_{x \rightarrow b} F(x) = \sup_{x \in [a, +\infty[} (F)$.

Proposition 5 (Cas où f est à valeurs réelles positives)

Soit $f : [a; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et à valeurs positives.

- Si $\int_a^{+\infty} f$ converge, alors $\int_a^{+\infty} f \geq 0$ (positivité de l'intégrale).
- Si f est continue sur $[a; +\infty[$, et si $\int_a^{+\infty} f = 0$ alors $f = 0$.
- $\int_a^{+\infty} f$ converge $\iff \left(x \rightarrow \int_a^x f(t) dt \right)$ est majorée sur $[a; +\infty[$.
- $\int_a^{+\infty} f$ diverge $\iff \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x \rightarrow \int_a^x f(t) dt \right) = +\infty$.
- Soit $g : [a; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux telle que $\forall t \in [a, +\infty[, 0 \leq f(t) \leq g(t)$.

Alors : $\left(\int_a^{+\infty} g(t) dt \text{ converge} \right) \implies \left(\int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ converge} \right)$

et $\left(\int_a^{+\infty} f(t) dt \text{ diverge} \right) \implies \left(\int_a^{+\infty} g(t) dt \text{ diverge} \right)$

II.2 Fonctions intégrables

Définition 5 (Convergence absolue) Soit $f : [a; +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux.

On dit que $\int_a^\infty f$ converge absolument lorsque $\int_a^{+\infty} |f(t)| dt$ converge.

Remarque 5 Attention, $|f|$ désigne la **valeur absolue** de f si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et son **module** si $\mathbb{C}$.

Proposition 6 Soit $f : [a; +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux.

La convergence absolue de $\int_a^\infty f$ entraîne la convergence de $\int_a^\infty f$

Preuve On suppose que $\int_a^\infty f$ converge absolument.

Premier cas : la fonction f est à valeurs réelles.

$-|f| \leq f \leq |f|$ donc $0 \leq f + |f| \leq 2|f|$. On pose $g(x) = (f + |f|)(x)$ et $h(x) = 2|f(x)|$.

Alors $0 \leq g \leq h$ et $\int_a^{+\infty} h(t)dt$ converge.

Donc d'après les théorèmes de comparaison d'intégrales de fonctions positives, on en déduit que $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge,

c'est à dire : $\int_a^{+\infty} f + |f|$ converge. On soustrait alors $\int_a^{+\infty} |f|$ et le tour est joué (on utilise la proposition 3, page 3).

Deuxième cas : f est à valeurs complexes : on écrit $f = \operatorname{Re}(f) + i\operatorname{Im}(f)$. On sait que $|\operatorname{Re}(f)| \leq |f|$ donc par comparaison $\int_a^{+\infty} |\operatorname{Re}(f)|$ converge absolument. De même pour la partie imaginaire. Ensuite on utilise la proposition 4, page 3.

Définition 6 (Fonction intégrable) Soit $f : [a; +\infty[\rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux.

On dit que f est intégrable sur $[a; +\infty[$ lorsque : $\int_a^\infty f$ converge absolument

L'ensemble des fonctions intégrables sur $[a; +\infty[$ est noté $\mathcal{L}^1([a; +\infty[, \mathbb{K})$.

Remarque 6 Comme l'intégrabilité sur $[a; +\infty[$ ne dépend que du comportement de f au voisinage de $+\infty$, on dit aussi que f est intégrable en $+\infty$.

Exemple 7 La fonction $x \mapsto \frac{\cos(t)}{t^2}$ est-elle intégrable sur $[1, +\infty[$?

Remarque 7 Si f est de signe constant sur $[a; \infty[$, alors : $(f \text{ est intégrable} \iff \int_a^\infty f \text{ converge})$.

Remarque 8 f intégrable sur $[a; +\infty[\Rightarrow \int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge. Mais la réciproque est fausse !

Exemple 8 Montrer que la fonction $(u \mapsto e^{iu^2})$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty[$.

Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{iu^2} du$ converge (IPP sur $[1, X]$ puis $X \rightarrow +\infty$).

Proposition 7 (Théorèmes de comparaison) Soient $f \in CM([a; +\infty[, \mathbb{K})$ et $g \in CM([a; +\infty[, \mathbb{K})$.

- Si $|f| \leq |g|$ alors : $(g \text{ intégrable} \Rightarrow f \text{ intégrable})$.
- Si $f = O(g)$ alors : $(g \text{ intégrable} \Rightarrow f \text{ intégrable})$.
- Si $f = o(g)$ alors : $(g \text{ intégrable} \Rightarrow f \text{ intégrable})$.
- Si $f \sim g$ alors : $(g \text{ intégrable} \Leftrightarrow f \text{ intégrable})$.

Exemple 9 Nature de $\int_0^\infty \frac{e^{it}}{\sqrt{\ln(t)}} dt$, de $\int_1^\infty \frac{\sin(\ln t)}{t^2} dt$

Exemple 10 • Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2(1+t^2)}$ est convergente et la calculer.

- Calculer $\int_1^{+\infty} \frac{|x-1|}{x^3} dx$.

II.3 Fonctions intégrables de référence

Proposition 8 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\left(\int_0^\infty e^{-\alpha t} dt \text{ converge} \iff \alpha > 0 \right) \quad \text{et} \quad \left(\underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{t^\alpha} dt}_{\text{intégrale de Riemann}} \text{ converge} \iff \alpha > 1 \right)$$

Autre formulation :

$$\left((t \mapsto e^{-\alpha t}) \text{ est intégrable sur } [0, +\infty[\right) \iff \alpha > 0$$

$$\left(\left(t \mapsto \frac{1}{t^\alpha} \right) \text{ est intégrable sur } [1, +\infty[\right) \iff \alpha > 1$$

Exemple 11 Quelle est la nature de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{1/t}}{1+t^2} dt$?

III Généralisation aux autres types d'intervalles

III.1 Définitions

III.1.a Intégrales sur un intervalle $[a, b[$

Définition 7 Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Soit $f \in CM([a, b[, \mathbb{K})$. Pour $x \in [a, b[$, on pose $F(x) = \int_a^x f(t) dt$.

Si F a une limite finie à gauche en b^- , on dit que **l'intégrale** $\int_a^b f(t) dt$ **converge**.

Notation lorsqu'elle converge : $\lim_{x \rightarrow b^-} \int_a^x f(t) dt = \int_a^b f = \int_a^b f(t) dt$.

Dans les deux cas, on dit que $\int_a^b f(t) dt$ est **impropre en b** .

Exemple 12 Quelle est la nature de $\int_0^2 \frac{1}{2-t} dt$? Peut-on la calculer ?

Remarque 9 Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Soit $f \in CM([a, b[, \mathbb{K})$ et enfin soit $c \in [a, b[$.

Alors : $\int_a^b f(t) dt$ converge $\iff \int_c^b f(t) dt$ converge. Dans ce cas : $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$.

Ainsi : lorsque $f \in CM([a, b[, \mathbb{K})$, la nature de $\int_a^b f$ ne dépend que du comportement de f au voisinage de b .

III.1.b Intégrale sur un intervalle de la forme $]a, b]$

Définition 8 Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et soit $b \in \mathbb{R}$. Soit $f \in CM(]a, b], \mathbb{K})$. Pour $x \in]a, b]$, on pose $G(x) = \int_x^b f(t) dt$.

Si G a une limite finie à droite en a^+ , on dit que **l'intégrale** $\int_a^b f(t) dt$ **converge**.

Notation : $\int_a^b f = \int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a^+} \int_x^b f(t) dt$.

Si G n'a pas de limite finie en a^+ , on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est **divergente**.

Dans les deux cas, on dit que $\int_a^b f(t) dt$ est une intégrale **impropre en a** .

Exemple 13 Indiquer la nature des intégrales suivantes : $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$, $\int_{-\infty}^1 e^t dt$ et $\int_0^2 \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$.

Remarque 10 Soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ et soit $b \in \mathbb{R}$. Lorsque $f \in CM(]a, b], \mathbb{K})$, la nature de $\int_a^b f$ ne dépend que

III.1.c Intégrales sur un intervalle ouvert

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à des intégrales sur un intervalle $]a; b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Définition 9 Soit $f \in CM(]a, b[, \mathbb{K})$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ converge lorsque :

il existe $c \in]a, b[$ tel que $\int_a^c f(t)dt$ et $\int_c^b f(t)dt$ convergent.

Dans ce cas, on pose : $\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt$

Dans le cas contraire, on dit que $\int_a^b f(t)dt$ diverge.

Dans les deux cas, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est **doublement impropre (en a et en b)**.

Remarque 11 D'après les remarques 3, 9 et 10, la valeur de c est indifférente.

Remarque 12 Dans ce cas, on étudie la convergence de l'intégrale $\int_a^b f$ en séparant l'intégrale en deux et on effectue une étude séparée sur chacune des bornes.

Exemple 14 Nature de $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}$? de $\int_0^{\infty} e^{it} \ln(t) e^{-2t} dt$? de $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} dt$?

Exemple 15 Soit g une fonction continue sur $[a, +\infty[$ telle que $\int_a^{+\infty} g(t)dt$ converge.

Justifier que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{+\infty} g(t)dt = 0$. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{2x} g(t)dt = 0$.

Définition 10 Soient f et g continues par morceaux sur I (ouvert ou semi-ouvert). On dit que $\int_a^b f(t)dt$ et $\int_a^b g(t)dt$ sont **de même nature** si elles sont toutes les deux convergentes ou bien toutes les deux divergentes.

III.2 Propriétés

Toutes les propriétés vues pour les intégrales sur un intervalle $[a, +\infty[$ se généralisent aux intervalles de la forme $[a, b[$ (où b est réel strictement supérieur à a) en remplaçant $+\infty$ par b .

Nous énonçons dans ce paragraphe les propriétés analogues pour les intervalles de la forme $]a, b]$ avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$.

Proposition 9 (Linéarité)

$E' = \left\{ f :]a; b] \rightarrow \mathbb{K}, \text{ telles que } \int_a^b f \text{ converge} \right\}$ est un sous-espace vectoriel de $CM(]a; b], \mathbb{K})$;

et l'application $f \rightarrow \int_a^b f$ est linéaire.

Proposition 10 (Cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) Soit $f :]a; b] \rightarrow \mathbb{C}$ continue par morceaux.

L'intégrale $\int_a^b f$ converge si et seulement si $\int_a^b \operatorname{Re}(f)$ et $\int_a^b \operatorname{Im}(f)$ convergent.

Dans ce cas, on a : $\int_a^b f = \int_a^b \operatorname{Re}(f) + i \int_a^b \operatorname{Im}(f)$

Exemple 16 Convergence de $\int_0^1 \frac{e^{it}}{\sqrt{t}} dt$?

Proposition 11 (Cas où f est à valeurs réelles positives)

Soit $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux et à valeurs positives.

- Si $\int_a^b f$ converge, alors $\int_a^b f \geq 0$ (positivité de l'intégrale).
- Si f est **continue** sur $]a; b]$, et si $\int_a^b f = 0$ alors $f = 0$.
- $\int_a^b f$ converge $\Leftrightarrow \left(x \rightarrow \int_x^b f(t)dt\right)$ est majorée sur $]a; b]$.
- $\int_a^b f$ diverge $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} \left(x \rightarrow \int_x^b f(t)dt\right) = +\infty$.
- Soit $g :]a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux telle que $\forall t \in]a; b], 0 \leq f(t) \leq g(t)$. Alors

$$\left(\int_a^b g(t)dt \text{ converge}\right) \Rightarrow \left(\int_a^b f(t)dt \text{ converge}\right) \quad \text{et} \quad \left(\int_a^b f(t)dt \text{ diverge}\right) \Rightarrow \left(\int_a^b g(t)dt \text{ diverge}\right)$$

Définition 11 (Convergence absolue) Soit $f :]a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux.

On dit que $\int_a^b f$ converge absolument lorsque $\int_a^b |f(t)| dt$ converge.

Proposition 12 Soit $f \in CM(]a; b], \mathbb{K})$. La convergence **absolue** de $\int_a^b f$ entraîne la convergence de $\int_a^b f$

Définition 12 (Fonction intégrable) Soit $f :]a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux.

On dit que f est intégrable sur $]a; b]$ (ou intégrable en a), lorsque : $\int_a^b f$ converge absolument

L'ensemble des fonctions intégrables sur $]a; b]$ est noté $\mathcal{L}^1(]a, b], \mathbb{K})$.

Proposition 13 (Théorèmes de comparaison) Soient f et g continues par morceaux $]a; b] \rightarrow \mathbb{K}$.

- Si $|f| \leq |g|$ alors g intégrable sur $]a; b] \Rightarrow f$ intégrable sur $]a; b]$.
- Si $f = O_a(g)$ alors g intégrable en $a \Rightarrow f$ intégrable en a .
- Si $f = o_a(g)$ alors g intégrable en $a \Rightarrow f$ intégrable en a .
- Si $f \sim_a g$ alors g intégrable en $a \Leftrightarrow f$ intégrable en a .

Exemple 17 Nature des intégrales $I = \int_0^1 (\ln(t))^2 \cos(t)dt$, $J = \int_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ et $K = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-x}}{1+x^2} dx$.

Proposition 14 (Fonctions intégrables de référence) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et a et b deux réels tels que $a < b$.

- La fonction $\ln$ est intégrable sur $]0, 1]$. Ainsi $\int_0^1 \ln(t)dt$ converge.
- La fonction $\left(t \mapsto \left(\frac{1}{t^\alpha}\right)\right)$ est intégrable sur $]0, 1]$ si et seulement si $\alpha < 1$.

Ainsi $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha} dt$ converge $\Leftrightarrow \alpha < 1$ (intégrale de Riemann)

- La fonction $\left(t \mapsto e^{\alpha t}\right)$ est intégrable sur $] -\infty, 0]$ si et seulement si $\alpha > 0$.

Ainsi $\int_{-\infty}^0 e^{\alpha t} dt$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 0$.

- La fonction $\left(t \mapsto \frac{1}{|t|^\alpha}\right)$ est intégrable sur $] -\infty, -1]$ si et seulement si $\alpha > 0$.

Ainsi $\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{|t|^\alpha} dt$ converge $\Leftrightarrow \alpha > 1$ (intégrale de Riemann)

IV Propriétés de l'intégrale sur un intervalle quelconque

Dans cette partie I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ d'intérieur non vide.

Proposition 15 (Linéarité)

L'ensemble $\left\{ f : I \rightarrow \mathbb{K}, \quad \text{t.q.} \quad \int_I f \text{ converge} \right\}$ est un sous espace vectoriel de $CM(I, \mathbb{K})$;

et l'application $f \rightarrow \int_I f$ est linéaire.

L'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I et intégrables sur I est noté $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$.
 $\mathcal{L}^1(I, \mathbb{K})$ est un sous espace vectoriel de $CM(I, \mathbb{K})$.

Proposition 16 (Cas où f est à valeurs réelles) Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continue par morceaux.

- Si $\int_I f$ converge et si f est positive, alors $\int_I f \geq 0$.
- Si f est continue et positive sur I , et si $\int_I f = 0$ alors $f = 0$.
- Si f et g sont continues par morceaux sur I , telles que $f \leq g$ et telles que $\int_I f$ et $\int_I g$ convergent, alors

$$\int_I f \leq \int_I g$$

Proposition 17 (Inégalité triangulaire) Soit f continue par morceaux et intégrable sur I , alors : $\left| \int_I f \right| \leq \int_I |f|$

Proposition 18 Relation de Chasles : Soit f continue par morceaux sur I , telle que $\int_I f$ converge.

Soient x, y et z , trois points ou extrémités de I .

Alors les intégrales $\int_x^y f$, $\int_x^z f$ et $\int_z^y f$ convergent et $\int_x^y f = \int_x^z f + \int_z^y f$

Proposition 19 (Résultat spécifique aux intervalles bornés) Soit $f :]a; b] \rightarrow \mathbb{K}$ continue par morceaux. Si f est bornée sur $]a; b]$, alors f est intégrable sur $]a; b]$.

Exemple 18 Nature de $\int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt$? de $\int_0^1 x \ln(x) dx$?

V Calculs d'intégrales

V.1 Technique déjà à notre disposition si f est continue sur I

Si $f \in \mathcal{C}^0(I)$ et l'on connaît une primitive F de f , on peut écrire

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \lim_{x \rightarrow a^+} (F(c) - F(x)) + \lim_{y \rightarrow b^-} (F(y) - F(c)) = \lim_{y \rightarrow b^-} F(y) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x)$$

si toutefois ces limites sont finies évidemment...

N.B. : il n'est pas nécessaire de calculer $F(c)$. Il est toutefois très conseillé de décomposer le calcul : le correcteur doit être convaincu que vous avez examiné la convergence de l'intégrale impropre EN a ET EN b.

V.2 Utilisation précautionneuse de la linéarité

Si f s'écrit comme combinaison linéaire de fonctions **dont les intégrales convergent** sur $]a, b[$, on peut écrire

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b (\alpha g(t) + \beta h(t))dt = \alpha \int_a^b g(t)dt + \beta \int_a^b h(t)dt$$

Attention à bien justifier ceci en notant/prouvant que les intégrales $\int_a^b g(t)dt$ et $\int_a^b h(t)dt$ convergent !

Exemple 19 Convergence et calcul de $\int_0^{+\infty} \left(\frac{t}{(1+t^2)^2} + te^{-t^2} \right) dt$

V.3 Intégration par parties sur un intervalle quelconque

Théorème 2 Soient u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a, b[$.

On suppose que la fonction $t \mapsto u(t)v(t)$ admet une limite finie en a et en b .

Alors les intégrales $\int_a^b u'(t)v(t)dt$ et $\int_a^b u(t)v'(t)dt$ sont de même nature.

En cas de convergence, on a de plus : $\int_a^b u(t)v'(t)dt = \lim_{t \rightarrow b^-} (u(t)v(t)) - \lim_{t \rightarrow a^+} (u(t)v(t)) - \int_a^b u'(t)v(t)dt$

ce que l'on peut aussi écrire : $\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt$

Exemple 20 Justifier la convergence de $I = \int_0^{+\infty} te^{-t}dt$ et calculer I .

Remarque 13 Il peut arriver qu'on ne puisse pas utiliser ce théorème, mais qu'une intégration par parties soit néanmoins judicieuse. Prenons par exemple $I = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} dt$.

Commencer par justifier l'existence de I .

Pour calculer I , on souhaite ensuite effectuer une intégration par parties en posant :

$$u(t) = \ln(t) \text{ et } v'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} \text{ et enfin } v(t) = -\frac{1}{1+t}.$$

Mais on ne peut pas appliquer le théorème car $\lim_{t \rightarrow 0} u(t)v(t) = +\infty$.

On peut toutefois écrire : $I = \lim_{x \rightarrow 0} \int_x^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} dt$.

Calculer $\int_x^1 \frac{\ln(t)}{(1+t)^2} dt$ puis faire tendre x vers 0 pour trouver I .

V.4 Changement de variable

Théorème 3 Etant données une fonction f continue sur $]a, b[$ et une fonction $\varphi :]\alpha, \beta[\rightarrow]a, b[$ bijective, strictement monotone et de classe $\mathcal{C}^1$, les intégrales

$$\int_a^b f(t)dt \text{ et } \int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) |\varphi'(u)| du$$

sont de même nature et égales en cas de convergence.

Preuve (dém. non exigible) Démontrons le théorème dans le cas où φ est strictement croissante.

Si F est une primitive de f , alors $F \circ \varphi$ est une primitive de $u \mapsto \varphi'(u)f(\varphi(u))$.

Soit $c \in]a, b[$. On s'intéresse tout d'abord à $\int_a^c f(t)dt$.

Le théorème de la bijection monotone permet d'écrire que $a = \lim_{t \rightarrow \alpha} \varphi(t)$. Soit $X \in]a, b[$. On pose $x = \varphi(X)$ et $c = \varphi(C)$.

$$\int_X^C f \circ \varphi(u) \varphi'(u) du = [F \circ \varphi(C) - F \circ \varphi(X)] = [F(x) - F(c)] = \int_x^c f(t)dt$$

Ainsi l'intégrale $\int_X^C f \circ \varphi(u) \varphi'(u) du$ converge si et seulement si $F \circ \varphi(X)$ a une limite quand X tend vers α , ce qui revient à dire que x tend vers a , car φ bijective et monotone. Et $F \circ \varphi(X) \xrightarrow{X \rightarrow \alpha} L \iff F(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} L$.

Dans le cas où ces deux intégrales convergent, elles sont donc bien égales. Puis on procède de même en $b...$

Démonstration analogue si φ est strictement décroissante.

Remarque 14 En pratique, si φ est croissante, alors $\varphi' > 0$ et donc l'égalité s'écrit :

$$\int_a^b f(t)dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$$

Et si φ est décroissante, alors $\varphi' < 0$ et donc l'égalité s'écrit :

$$\int_a^b f(t)dt = - \int_\alpha^\beta f(\varphi(u)) \varphi'(u) du = \int_\beta^\alpha f(\varphi(u)) \varphi'(u) du$$

Exemple 21 1. Effectuer le changement de variable $t = \sqrt{u}$ dans l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$.

2. Montrer que $\int_1^2 \frac{dt}{(t-1)^\alpha}$ converge si et seulement si

3. Soit $I = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{1 + \cos^2(t)}$.

(a) Justifier l'existence de I .

(b) Effectuer le changement de variable $u = \tan(t)$ dans l'intégrale I , après avoir justifié qu'il est licite.

(c) Calculer I .

Proposition 20 (Intégrales de Riemann sur un intervalle borné.) Soit deux réels $a < b$.

Les intégrales $\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha} dt$ et $\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha} dt$ convergent si et seulement si $\alpha < 1$.

Exemple 22 Nature de $\int_1^3 \frac{1}{(3-t)^{0.3}} dt$.

Remarque 15 De même : la fonction $x \mapsto f(x)$ est intégrable en $a^+ \iff t \mapsto f(a+t)$ est intégrable en 0^+ .

Et : $x \mapsto f(x)$ est intégrable en $b^- \iff t \mapsto f(b-t)$ intégrable en 0^+ .

VI Conclusion

Etude de $\int_a^b f(t)dt$ ou de $\int_I f(t)dt$ où I est un intervalle d'extrémités a et b ($a = \inf(I)$ et $b = \sup(I)$).

1. Reconnaître une intégrale impropre.

(a) si I n'est pas borné, c'est une intégrale impropre.

(b) Si I est borné et si f est continue sur $[a, b]$ ce n'est pas une intégrale impropre. Il n'y a pas de convergence à justifier.

(c) Si f est continue sur $[a, b[$ ou $]a, b]$ ou $]a, b[$, sans l'être sur $[a, b]$, c'est une intégrale impropre dont il faut justifier la convergence. Avant tout chose, on précise si elle est impropre en a , en b , ou les deux. Si $I =]a, b[$, on étudie séparément la convergence en a et en b , autrement dit, on étudie $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ séparément (avec $c \in]a, b[$)

2. Pour montrer que $\int_a^b f(t)dt$ converge :

(a) Si $I = [a, b[$, on peut montrer que $\left(x \mapsto \int_a^x f(t)dt\right)$ a une limite finie quand $x \rightarrow b^-$

(b) Si f est positive, on trouve g intégrable telle que $0 \leq f \leq g$.

(c) Si f est positive, on trouve g intégrable telle que $f \sim_b g$.

(d) On peut montrer que la fonction f est intégrable ($\Rightarrow$ items suivant)

3. Pour montrer que f est intégrable :

(a) On trouve g réelle positive intégrable sur I , telle que $|f| \leq g$.

(b) Si $I = [a, b[$. On trouve g réelle positive intégrable telle que $|f| \sim_b g$.

(c) Si $I = [a, b[$. On trouve g réelle positive intégrable telle que $f \underset{t \rightarrow b}{=} O(g(t))$

(d) Si $I = [a, b[$. On trouve g réelle positive intégrable telle que $f \underset{t \rightarrow b}{=} o(g(t))$

4. Techniques pour calculer une intégrale impropre, par exemple pour $I = [a, b[$.

(a) On calcule $\int_a^x f$ puis on fait tendre x vers b .

(b) Changement de variable. Bien vérifier que le changement de variable φ est de classe $\mathcal{C}^1$, strictement monotone, bijectif.

(c) Utilisation **précautionneuse** de la linéarité : pour écrire $\int_I (f + \lambda g) = \int_I f + \lambda \int_I g$, il faut que $\int_I f$ et $\int_I g$ convergent.

(d) Integration par parties sur $I = [a, b[$ par exemple, et on veut intégrer $f(t) = u(t)v'(t)$.

• si $u(t)v(t)$ a des limites finies aux bornes, on utilise le théorème d'IPP.

• On écrit l'IPP entre a et x et on fait tendre x vers b .

(e) On se laisse guider par l'énoncé...

Table des matières

I	Fonctions continues par morceaux	1
I.1	Fonction continue par morceaux sur un segment	1
I.2	Intégrale sur un segment	1
I.3	Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment	1
I.4	Fonction continue par morceaux sur un intervalle quelconque	2
II	Intégrale généralisée sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$.	2
II.1	Généralités	2
II.2	Fonctions intégrables	4
II.3	Fonctions intégrables de référence	5
III	Généralisation aux autres types d'intervalles	5
III.1	Définitions	5
III.1.a	Intégrales sur un intervalle $[a, b[$	5
III.1.b	Intégrale sur un intervalle de la forme $]a, b]$	5
III.1.c	Intégrales sur un intervalle ouvert	6
III.2	Propriétés	6
IV	Propriétés de l'intégrale sur un intervalle quelconque	8
V	Calculs d'intégrales	8
V.1	Technique déjà à notre disposition si f est continue sur I	8
V.2	Utilisation <u>précautionneuse</u> de la linéarité	8
V.3	Intégration par parties sur un intervalle <u>quelconque</u>	9
V.4	Changement de variable	9
V.5	Approfondissement : Etude d'intégrales semi-convergente	10
VI	Conclusion	11