

Partie 1 : Révisions

* Exercice 1 Exercice de base.

Donner des primitives des fonctions suivantes : $(x \mapsto \frac{1}{x^2 + x + 1})$, $(x \mapsto \frac{x+5}{x^2 + x + 1})$ et $(x \mapsto \frac{x}{x^2 - 5x + 6})$.

* Exercice 2 Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1. \int_0^{\pi/2} \sin^3(x) \cos(x) dx & 2. \int_0^x t \sqrt{1+t^2} dt & 3. \int_1^x \frac{1}{t(1+\ln(t))^3} dt \\ 4. \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t(t+1)}} dt & 5. \int_1^x \frac{\sin(2t)}{1+\cos^2(t)} dt & 6. \int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt \end{array}$$

* Exercice 3 Calculer les intégrales suivantes :

$$\begin{array}{llll} 1. \int_1^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x(x^2+1)} & 4. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x) dx}{1+2\cos(x)} & 7. \int_0^1 \ln(1+x^2) dx & 10. \int_0^1 \max(x, \frac{1}{3}) dx \\ 2. \int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2-4} & 5. \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)(1-\sin^2(x)) dx}{\cos^3(x)} & 8. \int_a^b \frac{dx}{x \ln^n(x)} \text{ où } n \in \mathbb{N} & 11. \int_0^1 \left| x - \frac{1}{3} \right| dx \\ 3. \int_0^1 \frac{2x+3}{2x+1} dx & 6. \int_1^2 \ln^2(x) dx & 9. \int_1^2 \frac{1-\ln(x)}{x} dx & 12. \int_1^{e^\pi} \cos(\ln(x)) dx \text{ (IPP)} \end{array}$$

** Exercice 4 Calculer les intégrales suivantes : $\int_{-1}^{1/2} \sqrt{1-t^2} dt$, $\int_0^x \sqrt{1-t^2} dt$,

$$\int_0^x \frac{\tan(t)}{1+\sin^2(t)} dt, \quad \int_0^x \sqrt{4-t^2} dt, \quad \int_0^x \sqrt{t^2-4} dt$$

*** Exercice 5 Dans tout l'exercice, on étudie la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{t + \sin(t)} dt$$

1. Préciser l'ensemble de définition de f .
2. Montrer que f est paire.
3. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et calculer la dérivée de f .
4. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
5. Montrer que f admet en zéro la limite $\frac{\ln(2)}{2}$. En déduire que f se prolonge par continuité en zéro.

* Exercice 6 On définit une fonction f par : $f(x) = \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{(1-t^2)}{(1+t^2)\sqrt{1+t^4}} dt$.

Déterminer son ensemble de définition, et justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$.

Montrer que, pour $x \neq 0$, $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$ (changement de variables). En déduire que f est identiquement nulle.

♡ ** Exercice 7 Déterminer l'ensemble de définition/dérivation de chacune des fonctions suivantes et calculer leurs dérivées :

$$F_1(x) = \int_2^x \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} dt, \quad F_2(x) = \int_{-3}^x \frac{1}{\sqrt{t^2-1}} dt, \quad F_3(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{\ln(t)} dt$$

♡ * Exercice 8 Grand classique : Lemme de Lebesgue.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a, b]$. Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) \cos(nt) dt = 0$.

♡ * Exercice 9 On pose $f(x) = \int_x^{x^2} \frac{1}{1+t^2} dt$. Donner un développement limité à l'ordre 4 en 0.

**** Exercice 10** Soit p et q des entiers de $\mathbb{N}$, on pose $B(p, q) = \int_0^1 t^p(1-t)^q dt$.

1. Comparer $B(p, q)$ et $B(q, p)$.
2. On suppose $p \geq 1$, montrer que $B(p, q) = \frac{p}{q+1} B(p-1, q+1)$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $B(0, n)$ et en déduire $B(p, q)$.
4. Donner la valeur de $\int_0^{\pi/2} (\sin x)^{2q+1} (\cos x)^{2p+1} dx$. (Indication : poser $u = \sin^2(x)$) **TOURNER LA PAGE**
5. Montrer que $B(p, p) \leq (\frac{1}{4})^p$ et donner la limite de $(B(p, p))$.

*** Exercice 11** Calculer les limites des suites suivantes :

1. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k^2}$
2. $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{2n+k}{n^2 + k^2}$
3. $u_n = n \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k^2}$
4. $u_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) \cdots (2n-1)(2n)}$

*** Exercice 12** Trouver un équivalent (quand $n \rightarrow +\infty$) des suites suivantes :

$$x_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \quad \text{et} \quad y_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^2 + (n-k)^2}.$$

**** Exercice 13** Soit p un entier naturel, on souhaite montrer que $\sum_{k=0}^n k^p \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{n^{p+1}}{p+1}$.

Vérifier cette relation pour $p \in \{0, 1, 2, 3\}$. Puis prouver le résultat annoncé en utilisant $\int_0^1 x^p dx$.

Partie 2 : Intégrales impropres (ou généralisées)

Exercice 14 Soit $\phi :]0; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in]0; 1], \quad \phi(x) = x^3 \sin(1/x)$.

1. Montrer que ϕ admet un prolongement continu sur $[0; 1]$, on le note encore ϕ .
Que vaut $\phi(0)$? Montrer que $\phi([0; 1]) \subset [-1; 1]$.
2. Pour tout réel $x \in [-1; 1]$, on pose $f(x) = \lfloor x \rfloor$. Montrer que f est continue par morceaux.
3. Pour tout entier n non nul, on pose $u_n = f \circ \phi(\frac{1}{n\pi})$ et $v_n = f \circ \phi(\frac{2}{(4n-1)\pi})$.
Déterminer les limites des suites (u_n) et (v_n) . La fonction $f \circ \phi$ est-elle continue par morceaux?

Exercice 15 On définit la fonction f continue et affine par morceaux sur $[0; +\infty[$ par :

- Pour tout entier n non nul, f est affine sur les intervalles $[n - \frac{1}{4^n}, n]$ et $[n; n + \frac{1}{4^n}]$.
- Pour tout entier n non nul, $f(n - \frac{1}{4^n}) = f(n + \frac{1}{4^n}) = 0$ et $f(n) = 2^n$.
- En dehors des intervalles $[n - \frac{1}{4^n}, n]$ et $[n; n + \frac{1}{4^n}]$, f est nulle.

Montrer que $\int_0^\infty f(t) dt$ converge.

Exercice 16 $\forall t \geq 1$, on pose $f(t) = \frac{t - \lfloor t \rfloor}{t^2}$

1. Montrer que f est continue par morceaux sur $[1; +\infty[$ et que $\int_1^\infty f(t) dt$ converge.
2. Justifier l'existence de la constante d'Euler $\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right)$.
3. Calculer $\int_1^\infty f(t) dt$ en fonction de γ .

Exercice 17 Déterminer la nature des intégrales suivantes :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\cos(x)}} dx & I_2 &= \int_0^\infty \frac{\arctan(x)}{e^x - 1} dx & I_3 &= \int_1^e \frac{1}{\ln(u)} du \\ I_4 &= \int_0^\infty \frac{1}{u^\alpha(1+u)^\beta} du & I_5 &= \int_1^\infty \frac{\ln(t^2 - t)}{(1+t)^2} dt & I_6 &= \int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x^2} dx \\ I_7 &= \int_{-1}^1 \frac{1}{(t+2)\sqrt{1-t^2}} dt & I_8 &= \int_0^1 \frac{\cos(u)}{\sqrt{u}} du & I_9 &= \int_0^1 \frac{\ln(u)}{u^\alpha} du \end{aligned}$$

Exercice 18 Étudier la convergence de $\int_0^{+\infty} \ln\left(\frac{x}{1-e^{-x}}\right) \frac{e^{ax}}{x} dx$ pour $a \in \mathbb{R}$.

Exercice 19 Calculer $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{\cos x + 2 \sin x + 3}$ à l'aide du changement de variable $t = \tan(x/2)$.

Exercice 20 Existence et calcul de $\int_0^{+\infty} x e^{-\lfloor x \rfloor} dx$.

N.B. : vers la fin du calcul, il pourra être utile de démontrer que : $\forall x \in]-1, 1[, [\sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$.

Exercice 21 Convergence et calcul de $\int_0^\infty \ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$.

Exercice 22 Convergence et calcul de $\int_{2/\pi}^\infty \frac{\cos(1/t)}{t^2 \sqrt{\sin(1/t)}} dt$. (Indication : changement de variable $u = 1/t$).

Exercice 23 L'intégrale $\int_0^\infty \frac{e^{it}}{1+it} dt$ est-elle absolument convergente ? Convergente ?

Exercice 24 Fonction Gamma :

1. Montrer que pour tout réel $x > 0$, l'intégrale $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ est convergente.
2. Montrer que pour réel $x > 0$, on a : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout entier n non nul.

Exercice 25 Donner un équivalent de $S_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln(k)}$.

Exercice 26 Donner un équivalent de $u_n = \frac{1}{(\ln 2)^2 + (\ln 3)^2 + \dots + (\ln(n))^2}$.

La série $\sum u_n$ est-elle convergente ?

Exercice 27 Soit, pour $n \geq 1$, $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^4)^n} dx$.

1. (a) Démontrer l'existence de I_n .
(b) Trouver une relation entre I_{n+1} et I_n .
(c) Montrer que $\ln(I_{n+1}) = \ln(I_1) + \sum_{k=1}^n \ln(1 - \frac{1}{4k})$.
(d) Trouver la limite de I_n quand $n \rightarrow \infty$.
2. En posant $u = 1/x$, montrer que $I_1 = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1+u^2}{1+u^4} du$. Puis, en posant $v = u - 1/u$, calculer I_1 .
3. Calculer I_n .

Exercice 28 Intégrale de Gauss : On note $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$.

Pour tout entier n , $I_n = \int_0^{\pi/2} (\sin(x))^n dx$ et $J_n = \int_0^1 (1-x^2)^n dx$ et pour n non nul, $K_n = \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$

1. Justifier la convergence de I .
2. Retrouver rapidement que, pour tout entier $n \geq 2$, on a $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.
En déduire que, pour tout entier n non nul, on a $nI_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$.
3. Montrer que $I_n \sim I_{n-1}$ (indication : remarquer que la suite (I_n) décroît). En déduire que $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.
4. A l'aide d'un changement de variable, exprimer J_n en fonction des intégrales I_k .
A l'aide du changement $x = \tan(t)$, exprimer K_n en fonction des I_k .
5. Montrer que pour tout réel x , on a : $1 - x^2 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$.
En déduire que, pour tout entier $n \geq 2$, on a : $I_{2n+1} \leq \frac{I}{\sqrt{n}} \leq I_{2n-2}$. Puis montrer que $I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 29

1. Pour tout réel $x \in]0; \pi]$, on pose $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2 \sin(x/2)}$.
Montrer que f se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $[0; \pi]$.
2. Pour tout entier n , on pose $I_n = \int_0^{\pi} \frac{\sin(\frac{2n+1}{2}t)}{\sin(t/2)} dt$.
Justifier l'existence de I_n . Calculer $I_{n+1} - I_n$; puis I_n .
3. Montrer que pour toute fonction g de classe C^1 sur un segment $[a; b]$, on a $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \int_a^b g(x) \sin(\lambda x) dx = 0$.
4. Montrer que l'intégrale $I = \int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ converge et déduire des questions précédentes la valeur de I .

Partie 3 : exercices d'oral

Exercice 30 *N.B. : les deux questions sont indépendantes.*

1. La fonction $x \mapsto \frac{e^{-x}}{\sqrt{x^2 - 4}}$ est-elle intégrable sur $]2, +\infty[$?
2. Soit a un réel strictement positif.
La fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

Exercice 31 Nature de $\int_0^{+\infty} \frac{\arctan x}{x} \ln\left(\frac{2+x}{1+x}\right) dx$.

Exercice 32 Existence et valeur de $\int_1^{+\infty} \left[\arcsin\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x} \right] dx$.

Exercice 33

1. Montrer que $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^5(x)}{x^2} dx$ existe.
2. Montrer que $\sin^5(x) = \frac{1}{16}(\sin(5x) - 5\sin(3x) + 10\sin(x))$.
3. En déduire que $\forall A > 0$, $\int_A^{+\infty} \frac{\sin^5(x)}{x^2} dx = \frac{1}{16}(-15 \int_{3A}^{5A} \frac{\sin(x)}{x^2} dx + 10 \int_A^{5A} \frac{\sin(x)}{x^2} dx)$.
4. En déduire la valeur de I .

Exercice 34 Nature de $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$?

Exercice 35 Convergence et calcul de $\int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2} dx$.