

NB : Tous les énoncés/définitions sont à connaître précisément. De plus, les démonstrations/exemples du paragraphe "Questions de cours" sont à savoir faire avec aisance. Attention : les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement, à part quand cela est précisé par la mention « démonstration non exigible » ou « résultat admis ».

1. **Probabilités sur un univers fini** : tout exercice sur le programme de PCSI.
2. **Ensembles dénombrables, familles sommables** : voir programme précédent.
3. **Probabilités discrètes** : voir programme précédent
 - (a) **Univers, événements** : voir programme précédent
 - (b) **Probabilité** : voir programme précédent
 - (c) **Probabilités conditionnelles** : voir programme précédent
 - (d) **Événements indépendants** : voir programme précédent
4. **Variables aléatoires discrètes : Premier épisode.**

(a) **Généralités.**

Une variable aléatoire discrète X est une application définie sur Ω , telle que $X(\Omega)$ est au plus dénombrable et, pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\})$ est un événement. L'univers Ω n'est en général pas explicite.

Notations ($X = x$), $\{X = x\}$, ($X \in A$). Notation ($X \geq x$) (et analogues) lorsque X est à valeurs réelles.

Loi P_X d'une variable aléatoire discrète.

La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$.

On note $X \sim Y$ lorsque les variables X et Y suivent la même loi.

Variable aléatoire $f(X)$. Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.

(b) **Variable aléatoire X à valeurs réelles ou complexes d'espérance finie, espérance de X**

X est d'espérance finie si la famille $(xP(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de X .

(c) **Théorème d'antirépartition** : Pour X variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, relation : $E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geq n)$.

5. **Intégration : Premier épisode**

Réviser le programme de PCSI : intégrale définie sur un segment, calculs de primitives et d'intégrales.

Questions de cours : démonstration ou exemples à savoir traiter.

- Les définitions du chapitre de probabilités discrètes DOIVENT être connues.
- Théorème de continuité croissante (grandes lignes de la preuve).
- Être capable de dire ce que l'on admet du modèle décrivant l'expérience "on tire indéfiniment à Pile ou Face".
- Sous additivité : $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.
- Formule des probabilités totales et formule de Bayes.
- **Exercice type** : On a n urnes $U_1, \dots, U_n$. L'urne U_i contient a_i boules blanches et b_i boules noires. On choisit une urne au hasard et on tire une ou plusieurs boules de cette urne, avec remise.
Quelle est la probabilité que la première boule tirée soit blanche?
Quelle est la probabilité que les 10 premières boules tirées soient blanches?
- Donner une primitive pour chacune des fonctions suivantes, après avoir indiqué sur quel intervalle il est pertinent de travailler :

$$\left(x \mapsto \frac{1}{1+x^2}\right) \quad \text{et} \quad \left(x \mapsto \frac{1}{1-x^2}\right)$$

$$(x \mapsto a^x) \quad \text{et} \quad (x \mapsto x^a)$$

$$(x \mapsto x^n) \quad \text{et} \quad \left(x \mapsto \frac{1}{x^n}\right)$$

$$\left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) \quad \text{et} \quad \left(x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$$

- Théorème d'intégration par parties sur un segment (énoncé)
- Énoncé du théorème de changement de variable pour une intégrale sur un segment.
- Énoncer la formule de Taylor avec reste intégral.