NB : Tous les énoncés/définitions sont à connaître précisément. De plus, les démonstrations/exemples du paragraphe "Questions de cours" sont à savoir faire avec aisance. Attention : les autres démonstrations ne sont pas censées être ignorées totalement, à part quand cela est précisé par la mention « démonstration non exigible » ou « résultat admis ».

1. **Fonctions continues par morceaux** sur un segment, puis sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Intégrale sur un segment d'une fonction continue par morceaux. Brève extension des propriétés de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment étudiées en première année. Aucune construction n'est exigible.
2. **Intégrales généralisées sur un intervalle de la forme** $[a,+\infty[$
   Pour f continue par morceaux sur $[a,+\infty[$, l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite convergente si $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Notations $\int_a^{+\infty} f$, $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente (resp. divergente) en $+\infty$.
   Si $f \in CM([a,+\infty[,\mathbb{R})$ et $f \geq 0$, alors $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est majorée.
   Si $f \in CM([a,+\infty[,\mathbb{R})$ et $g \in CM([a,+\infty[,\mathbb{R})$ sont telles que $0 \leqslant f \leqslant g$, la convergence de $\int_a^{+\infty} g$ implique celle de $\int_a^{+\infty} f$.
3. **Intégrales généralisées sur un intervalle quelconque**. Adaptation du paragraphe précédent aux fonctions continues par morceaux définies sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert de $\mathbb{R}$. Notations $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Intégrale convergente (resp. divergente) en b, en a. Propriétés des intégrales généralisées : linéarité, positivité, croissance, relation de Chasles.
   Intégration par parties sur un intervalle quelconque : si f et g sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et si le produit fg a des limites finies aux bornes de l'intervalle, alors les intégrales de fg' et $f'g$ sont de même nature et de plus, en cas de convergence : $\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.
   Changement de variable : si $\varphi :]\alpha,\beta[\to]a,b[$ est une bijection strictement croissante de classe $\mathscr{C}^1$, et si f est continue sur $]a,b[$, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_\alpha^\beta (f\circ\varphi)(u)\,\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ sont de même nature, et égales en cas de convergence. Adaptation au cas où φ est strictement décroissante. On applique ce résultat sans justification dans les cas de changements de variable usuels.
4. **Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables**
   La convergence absolue implique la convergence. (L'étude des intégrales semi-convergentes n'est pas un objectif du programme.) Inégalité triangulaire.
   Une fonction est dite intégrable sur un intervalle I si elle est continue par morceaux sur I et son intégrale sur I est absolument convergente. Notations $\int_I f$, $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t$. Pour $I = [a,b[$, (respectivement $]a,b]$), fonction intégrable en b (resp. en a).
   Espace vectoriel $L^1(I,\mathbb{K})$ des fonctions intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
   Si f est **continue**, intégrable et positive sur I, et si $\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est identiquement nulle.
   Théorème de comparaison : pour f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,+\infty[$:
   - si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\big(g(t)\big)$, alors l'intégrabilité de g en $+\infty$ implique celle de f. Le résultat s'applique lorsque $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o(g(t))$.
   - si $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)$, alors l'intégrabilité de f en $+\infty$ est équivalente à celle de g.

   Adaptation au cas d'un intervalle quelconque.
5. **Intégrales généralisées de référence** : pour $\alpha \in \mathbb{R}$,
   - intégrales de Riemann : étude de l'intégrabilité de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ en $+\infty$, en 0^+ ;
   - étude de l'intégrabilité de $t \mapsto e^{-\alpha t}$ en $+\infty$.
   - intégrabilité de $t \mapsto \ln(t)$ en 0

   Les résultats relatifs à l'intégrabilité de $x \mapsto \frac{1}{|x-a|^\alpha}$ en a peuvent être directement utilisés.

Questions de cours : démonstration ou exemples à savoir traiter.

- Calculs type à savoir faire : $\int_0^X \frac{dt}{t^2+t+1}$, $\int_a^X \frac{dt}{t^2-5t+6}$.
- Définition d'une fonction continue par morceaux
- Etre capable d'énoncer avec préciser les divers théorèmes de comparaison permettant de conclure à la convergence ou à la divergence d'une intégrale impropre.
- Théorème de comparaison pour montrer la convergence de $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ lorsque $0 \leq f \leqslant g$ (énoncé +dem)
- Intégrales de référence (énoncé et démonstration) : $\int_0^\infty e^{-\alpha t}dt$, $\int_1^\infty \frac{1}{t^\alpha}dt$, $\int_0^1 \ln(t)dt$, $\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}dt$, $\int_a^b \frac{1}{(t-a)^\alpha}dt$, et $\int_a^b \frac{1}{(b-t)^\alpha}dt$, $\int_{-\infty}^0 e^{\alpha t}dt$.
- Justifications d'une intégration par parties sur une intégrale généralisée.
- théorème de changement de variable pour les intégrales impropres (énoncé)