Révisions et compléments sur les déterminants

Table des matières

I Déterminant d'une matrice carrée

I.1 Le théorème fondamental

Définition 1 Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, notons $C_1, \cdots, C_n$ les vecteurs colonnes de M.
On peut noter ceci : $M = (C_1 \cdots C_n)$.
Soit $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$. **On dit que f est linéaire par rapport à chacune de ses colonnes lorsque** :
pour tout $i \in [\![1 \,;\, n]\!]$ et pour tout $(C_1, \cdots, C_{i-1}, C_{i+1}, \cdots C_n) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})^{n-1}$,

$$\text{l'application } C \mapsto f(\,(C_1 \cdots C \cdots C_n)\,) \text{ est linéaire.}$$

$$\text{Autrement dit : } f\,(\,(C_1 \cdots C_i + \lambda C_i' \cdots C_n)\,) = f\,(\,(C_1 \cdots C_i \cdots C_n)\,) + \lambda f\,(\,(C_1 \cdots, C_i' \cdots C_n)\,)$$

Théorème 1 Il existe une unique application $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ vérifiant les propriétés suivantes :
- f est linéaire par rapport à chacune des colonnes de la matrice.
- Si la matrice M' est obtenue en permutant 2 colonnes quelconques de la matrice M, on $f(M') = -f(M)$.
- $f(I_n)$=1.

Cette application est notée "det" : c'est l'application déterminant.

Exemple 1 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; déterminer $\det(A)$ à l'aide des 3 propriétés du théorème fondamental.

Exemple 2 Soit $A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$. Rappeler la formule de Sarrus. Savez-vous comment la montrer à partir du théorème fondamental ?

I.2 Propriétés

Proposition 1 (Propriétés (vues en 1ere année))
- Le déterminant d'une matrice ayant 2 colonnes égales est nul.
- Le déterminant d'une matrice dont une colonne est combinaison linéaire des autres colonnes, est nul.
- Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
- Le déterminant d'une matrice diagonale est le produit des coefficients diagonaux.
- Le déterminant d'un produit de matrices est le produit des déterminants :
  $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad \det(AB) = \det(A) \times \det(B)$
- Une matrice carrée A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.
  Dans ce cas : $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.
- Une matrice carrée A et sa transposée A^T ont le même déterminant

Proposition 2 (Déterminant et opération) Soit A une matrice carrée d'ordre n. On note $C_1, C_2, ...C_n$ les n colonnes de A.

- Transvection : l'opération élémentaire $C_i \longleftarrow C_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j C_j$ ne change pas la valeur du déterminant.
- Dilatation : l'opération élémentaire $C_i \longleftarrow \lambda C_i$ multiplie le déterminant de A par λ.
- Transposition : l'opération $C_i \longleftrightarrow C_j$ pour $i \neq j$ change $\det(A)$ en son opposé.

Proposition 3 (Matrices semblables. (dem))
Si A et B sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\det(A) = \det(B)$.

La réciproque est fausse.

Proposition 4 Le déterminant est linéaire par rapport à chacune de ses lignes.

Théorème 2 Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Si A comporte une ligne nulle, alors $\det(A) = 0$.
2. Si A comporte deux lignes égales, alors $\det(A) = 0$.
3. Si une ligne de A est combinaison linéaire des autres alors $\det(A) = 0$.
4. Quand on multiplie une ligne de A par λ, le déterminant est multiplié par λ.
5. On ne change pas le déterminant de A en ajoutant à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes.
6. Quand on échange 2 lignes, on mutiplie le déterminant par -1.

I.3 Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, pour $(i,j) \in \{1,2,...,n\}^2$ on note $A_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ obtenue en supprimant la i-eme ligne et la j-eme colonne de A.

Proposition 5 (Développement d'un déterminant) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $n \geqslant 2$.

- Développement par rapport à la j-eme colonne :

$$\forall j \in \{1,2,...n\} \quad \det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$

- Développement par rapport à la i-eme ligne :

$$\forall i \in \{1,2,...n\} \quad \det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j})$$

Vocabulaire : $\det(A_{i,j})$ est appelé mineur d'indice (i,j) de la matrice A.

Exemple 3 Développer par rapport à la deuxième colonne $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$

I.4 Déterminants remarquables

Proposition 6 (Déterminant d'une matrice triangulaire. (dem)) Si M est une matrice triangulaire, alors le déterminant de M est égal au produit de ses coefficients diagonaux.

Proposition 7 (Déterminant par blocs. (dem)) Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Alors :

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \det(A)\det(C)$$

Exemple 4 Caculer $\begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 & 3 & -4 \\ 1 & 7 & 8 & 9 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 10 \end{vmatrix}$.

Proposition 8 (Généralisation) Soit $M_i \in \mathcal{M}_{k_i}(\mathbb{K})$ avec $k_1 + k_2 + \ldots.. + k_r = n$.

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & * & * & * \\ 0 & M_2 & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & M_r \end{pmatrix}$$

Alors $\det(M) = \det(M_1)\det(M_2)\cdots\det(M_r)$

Proposition 9 (Déterminant de Vandermonde. (dem)) Soient $a_1, a_2, \ldots a_n$ des éléments de $\mathbb{K}$. On a :

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$$

Remarque 1 Relation entre les polynomes de Lagrange et le déterminant de Vandermonde

Exemple 5 Calculer $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 3 & 9 & 27 \\ 1 & 4 & 16 & 64 \end{vmatrix}$.

II Déterminant d'un endomorphisme, d'une famille de vecteurs

II.1 Déterminant d'un endomorphisme

Définition 2 (Déterminant d'un endomorphisme) Soit f un endomorphisme d'un espace E de dimension finie. Soit $\mathcal{B}$ une base quelconque de E.
On appelle déterminant de f le déterminant de $A = \mathcal{M}\text{at}_{\mathcal{B}}(f)$.
Ce déterminant ne dépend pas du choix de la base $\mathcal{B}$.
Notation : $\det(f)$.

Exemple 6 Soit $f = id_E$. Soit $g = \lambda id_E$. Donner les déterminants de f et de g.

Proposition 10 (Propriétés) Soient f et g deux endomorphisme de E (de dimension finie). Alors :

- $\det(gof) = \det(g)\det(f)$
- f est un isomorphisme si et seulement si $\det(f) \neq 0$. Dans ce cas, $\det(f^{-1}) = \dfrac{1}{\det(f)}$

II.2 Déterminant d'une famille de vecteurs

Définition 3 (Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base)
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension $n \geqslant 2$. Soient $x_1, x_2, ...x_n$ n vecteurs de E. Soit $\mathcal{B}$ une base de E.

$det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, ..., x_n) = \begin{vmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & \cdots & x_{1,n} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & \cdots & x_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & x_{n,2} & \cdots & x_{n,n} \end{vmatrix}$ où $\begin{pmatrix} x_{1,j} \\ x_{2,j} \\ \vdots \\ x_{n,j} \end{pmatrix}$ sont les coordonnées de x_j dans $\mathcal{B}$

Ce déterminant dépend du choix de la base $\mathcal{B}$.

Proposition 11 (Caractérisation des bases. (dem)) Soient $x_1, x_2, ...x_n$ n vecteurs de E.
La famille $(x_1, x_2, ...x_n)$ est une base de E si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}$ pour laquelle $det_{\mathcal{B}}(x_1, x_2, ..., x_n) \neq 0$

III Orientation d'un espace vectoriel réel

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$. Orienter E c'est décider parmi toutes les base de E celles qu'on appellera directes et celles qu'on appellera indirectes.

Définition 4 Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux bases de E. On note $P_{\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2}$ la matrice de passage de $\mathcal{B}_1$ à $\mathcal{B}_2$. On dit que :

- $\mathcal{B}_2$ a la même orientation que $\mathcal{B}_1$ si et seulement si $det(P_{\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2}) > 0$.
- $\mathcal{B}_2$ a une orientation opposée à celle de $\mathcal{B}_1$ si et seulement si $det(P_{\mathcal{B}_1;\mathcal{B}_2}) < 0$.

Cette relation permet de classer toutes les bases de E en deux catégories : toutes celles qui ont la même orientation que $\mathcal{B}_1$ et toutes celles qui ont une orientation opposée à $\mathcal{B}_1$.

Définition 5 Orienter l'espace E, c'est choisir une de ces deux catégories de bases : toutes les bases appartenant à la catégorie choisie sont alors dites directes ; toutes les autres indirectes.

En pratique, pour orienter E, on choisit une base, dont on décrète qu'elle est directe. Les bases directes sont alors toutes les bases qui ont la même orientation que cette base choisie ; les bases indirectes sont les autres.
Exemple 7 $E = \mathbb{R}^3$. On choisit de prendre la base canonique comme base directe. On pose $u = (1,0,0)$, $v = (1,1,0)$ et $w = (-1,-1,1)$. Montrer que (u,v,w) est une base de E. Est-elle directe ?

Proposition 12 (Orientation de l'image d'une base. (dem)) Soit f un isomorphisme de E. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ...e_n)$ une base de E.

- Si $det(f) > 0$ alors $(f(e_1), f(e_2), ...f(e_n))$ est une base de E de même orientation que $\mathcal{B}$.
- Si $det(f) < 0$ alors $(f(e_1), f(e_2), ...f(e_n))$ est une base de E d'orientation opposée à celle de $\mathcal{B}$.