Partie 1 : Exercices pour les TD

⋆ **Exercice 1** Calculer les déterminants suivants :

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & -1 & -1 \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \cos a & \cos 2a \\ 1 & \cos b & \cos 2b \\ 1 & \cos c & \cos 2c \end{vmatrix} \qquad D_3 = \det(A) \text{ où } \left\{ \begin{array}{l} A = (a_{i,j})_{(i,j)\in([\![1\,;\,n]\!])^2} \\ \text{avec} \quad a_{i,j} = ij \quad \text{pour} \quad (i,j) \in \{1,....,n\}^2 \end{array} \right.$$

⋆ **Exercice 2** Calculer $\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & b & c \\ a & b & 0 & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix}$ où a, b, c sont dans $\mathbb{K}$.

⋆ **Exercice 3** On note $e^{\frac{2i\pi}{3}} = j$. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$; on pose $A = \begin{pmatrix} c & a & b \\ b & c & a \\ a & b & c \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & j^2 \\ 1 & j^2 & j \end{pmatrix}$

Montrer que la matrice P est inversible.
Calculer AP, en déduire $\det(AP)$ puis $\det(A)$.

⋆ **Exercice 4** (Récurrence) . Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Si $n \in \mathbb{N}^*$, soit $M_n = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où :
$m_{1,1} = \cos\alpha$ et $m_{i,i} = 2\cos\alpha$ si $i \geqslant 2$
$m_{i,i+1} = m_{i+1,i} = 1$ si $i \in \{1, \dots, n-1\}$, les autres coefficients étant nuls.
Calculer $D_n = \det(M_n)$.

♡ **Exercice 5** Soient $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ avec $a \neq c$. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère les 3 déterminants (d'ordre n) :

$$A_n = \begin{vmatrix} b & a & 0 & .... & 0 \\ c & b & a & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & b & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & 0 & c & b \end{vmatrix} \qquad B_n = \begin{vmatrix} b & a & .... & .... & a \\ b & b & a & & a \\ \vdots & \ddots & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ b & \dots & \dots & b & b \end{vmatrix} \qquad C_n = \begin{vmatrix} b & a & .... & .... & a \\ c & b & a & & a \\ \vdots & \ddots & b & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a \\ c & \dots & \dots & c & b \end{vmatrix}$$

On pose $A_0 = B_0 = C_0 = 1$ et $A_1 = B_1 = C_1 = b$.

1. Montrer que pour tout entier n non nul, $A_{n+1} = bA_n - acA_{n-1}$.
   En déduire une expression de A_n en fonction de l'entier n.
2. Calculer B_n en soustrayant la dernière colonne aux autres.
3. Soit J_n la matrice de $M_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
   Pour tout $x \in \mathbb{K}$, on pose $P_n(x) = det(C_n + xJ_n)$.
   Montrer que P_n est un polynome de degré inférieur ou égal à 1.
   A l'aide de 2 valeurs particulières de P_n, déterminer la valeur de C_n.

⋆ ⋆♡ **Exercice 6** Soient A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\begin{pmatrix} A+iB & 0 \\ 0 & A-iB \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} I_n & iI_n \\ -iI_n & -I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_n & iI_n \\ -iI_n & -I_n \end{pmatrix}$
2. On suppose que A et B commutent. Déterminer alors une relation entre $\det(A^2 + B^2))$ et $\begin{vmatrix} A & -B \\ B & A \end{vmatrix}$

⋆ ⋆ **Exercice 7** Soient A, B, C, D, 4 matrices de $M_n(\mathbb{K})$. On suppose que $CD = DC$ et que D est inversible.
On pose $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. Calculer $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D & 0 \\ -C & D^{-1} \end{pmatrix}$.
En déduire $\det(M)$.

⋆ ⋆ ⋆ **Exercice 8** Soit A une matrice de rang 1.
Montrer que A est semblable à une matrice dont les $(n-1)$ premières colonnes sont nulles.
En déduire que $A^2 = \mathrm{tr}(A)A$ et $\det(I + A) = 1 + \mathrm{tr}(A)$

$\star$ **Exercice 9** Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
Soient F et G deux sous-espaces supplémentaires de E.
On note p le projecteur sur F parallèlement à G, et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G.
Calculer la trace et le déterminant de p et de s, en fonction des dimensions de F et G.

$\star$ **Exercice 10** Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.
On définit l'application f sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par la relation suivante :

$$\forall M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \quad f(M) = AM - MA$$

Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$
Calculer $\det(f)$ et $\operatorname{tr}(f)$.

$\star$ **Exercice 11** Pour tout polynome $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on pose $f(P) = Q$ avec :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad Q(x) = \int_x^{x+1} P(t)dt$$

Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ et calculer son déterminant.

$\heartsuit$ **Exercice 12** La famille $((2,1,0),(1,3,1),(5,2,1))$ est-elle libre ?
Si elle est libre, quelle est son orientation en tant que base de $\mathbb{R}^3$, la base de référence étant la base canonique.

Partie 2 : Exercices d'oral

Exercice 13 Soient E un espace vectoriel de dimension 3, $\mathcal{B}$ une base de E, et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Soit $A \colon (x,y,z) \in E^3 \mapsto \det_{\mathcal{B}}(u(x),y,z) + \det_{\mathcal{B}}(x,u(y),z) + \det_{\mathcal{B}}(x,y,u(z))$.
Montrer que A est tri-linéaire c'est à dire : linéaire par rapport à chaque variable.
Montrer que $(x = y$ ou $y = z$ ou $x = z) \Rightarrow A(x,y,z) = 0$.
Montrer que $A = (\operatorname{tr}(u)) \det_{\mathcal{B}}$.

Exercice 14 Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{C}$, soit $A_p(\theta)$ la matrice $(\theta^{(i-1)(j-1)})_{1 \leqslant i,j \leqslant p}$.

1. Calculer $\det A_p(\theta)$ pour $2 \leqslant p \leqslant 8$.
   Indication : on pourra penser aux déterminants de Vandermonde.
2. Déterminer les $\theta \in \mathbb{C}$ tels que $\det A_p(\theta) = 0$.

Exercice 15 Soient $n \geqslant 2$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\det(A+X) = \det(A) + \det(X)$. Montrer que $\det A = 0$ puis que $A = 0$.

Exercice 16
Soient $(a,b,c_1,\ldots,c_n) \in \mathbb{R}^{n+2}$, $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ où $m_{i,i} = c_i$, $m_{i,j} = a$ si $i > j$, $m_{i,j} = b$ si $i < j$. On note J la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. Que peut-on dire de $\Delta : x \mapsto \det(M + xJ)$?
2. En déduire la valeur de $\det M$ si $a \neq b$.